Vorlesung

Analysis

Vorlesungsskript 2018/19

Prof. Dr. Nils Ackermann*
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt

*Basierend auf einem Skript von Prof. Dr. Tobias Weth

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Das Grundgerüst der Analysis sind die reellen Zahlen. Ziel der Analysis ist es, auf der Basis dieses Gerüstes mathematische Objekte wie z.B. Mengen, Abbildungen und Funktionen anhand ihrer **lokalen** und **globalen** Eigenschaften zu beschreiben.

Eine wesentliche Motivation für das Studium solcher Objektklassen ergibt sich aus der mathematischen Modellierung von Phänomenen und Problemstellungen in Natur, Technik und Ökonomie. Der Modellierungsprozess liefert eine Übersetzung fundamentaler Prinzipien in die Sprache der Mathematik und führt somit zu Charakterisierungen von mathematischen Objekten vermöge dieser Prinzipien (z.B. als Lösungen von Bewegungsgleichungen auf der Basis von Naturgesetzen).

Relevante **lokale** Objekteigenschaften sind z.B. Änderungsraten, Steigungen und Krümmungen, während man sich **global** für Volumeninhalte, Oberflächenmaße, Erhaltungssätze und die Optimierung von Zielgrößen (z.B. maximaler Ertrag, minimaler Energieaufwand) interessiert.

In der Schule lernt man bereits die Differentiation und Integration als Werkzeuge zur Bestimmung lokaler und globaler Eigenschaften einer Funktion kennen. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erkundet man dort auch bereits einen grundlegenden Zusammenhang zwischen Lokalität und Globalität. Das Studium solcher Zusammenhänge nimmt innerhalb der Analysis eine herausragende Rolle ein.

Die Basis für alle Untersuchungen der Analysis ist der Grenzwertbegriff.

Inhalt der Vorlesung Analysis 1:

- Zahlbereiche
- Folgen und Reihen
- Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen einer Variablen

Ausblick: Inhalt weiterführender Veranstaltungen zur Analysis ist u.a. die Integral- und Differentialrechnung in mehreren reellen und komplexen Variablen (Analysis 2, Höhere Analysis), gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sowie die Analysis in unendlich dimensionalen Vektorräumen (Lineare und nichtlineare Funktionalanalysis).

Teil I.

Analysis 1

1. Aussagen, Mengen und Abbildungen

1.1. Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde (Satz oder Formel) oder eine Symbolkette, welcher einer der *Wahrheitswerte* **wahr** (w) oder **falsch** (f) zugeordnet werden kann. Beispiele: (i) „9 ist eine Primzahl." (ii) „Die Goethe-Universität wurde im Jahr 1914 gegründet." Die Aussage (i) ist falsch, die Aussage (ii) ist wahr.

Der Wahrheitswert einer Aussage ist oft nicht bekannt. Beispiel: „In vier Wochen schneit es."

Der Wahrheitswert einer Aussage ist aber stets *objektiv*. In der Aussage „Frankfurt ist die schönste Stadt Deutschlands." muss die Eigenschaft „Schönheit" eine klar definierte Bedeutung besitzen, damit man dieser Aussage einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Durch elementare logische Operationen kann man aus gegebenen Aussagen neue Aussagen gewinnen, für deren Wahrheitswert plausible Regeln gelten. Diese Operationen kann man als Abbildungen verstehen, die die Werte w und f annehmen können. Um das zu erklären mögen im Folgenden A und B für Aussagen stehen.

Negation

A	**nicht**A
f	w
w	f

Kurzschreibweise: $\neg A$ für „**nicht** A".

„und/oder"

A	B	A **und** B	A **oder** B	**entweder** A **oder** B
f	f	f	f	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
w	w	w	w	f

Kurzschreibweisen: $A \wedge B$ für A **und** B, $A \vee B$ für A **oder** B. „**entweder** A **oder** B" kann man definieren als $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Implikation Wir betrachten die Aussage „aus A folgt B". Andere Sprechweisen dafür sind: „A impliziert B", „wenn A, dann B", „A ist hinreichend für B", „B ist notwendig für A". Kurzschreibweise: $A \Rightarrow B$ oder gleichbedeutend $B \Leftarrow A$.

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
w	f	f
f	w	w
w	w	w

Aus einer falschen Aussage lässt sich also „alles“ folgern!

Als *Umkehrung* einer Aussage der Form $(A \Rightarrow B)$ bezeichnet man die Aussage $(B \Rightarrow A)$.

Äquivalenz Wir definieren $A \Leftrightarrow B$ als $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ und sagen „A ist äquivalent zu B “.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
w	w	w	w	w

Zusammengesetzte Ausdrücke Bei Zusammensetzungen verwendet man Klammern. Zur Vermeidung einiger Klammern legt eine Konvention die Reihenfolge $\neg, \wedge, \vee$ in abnehmender Bindungsstärke fest. Die Symbole $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ binden noch schwächer und haben unter sich keine Reihenfolge. Im Zweifelsfall ist es besser, Klammern zu setzen!

Statt $(\neg A) \wedge (\neg B)$ können wir also zum Beispiel $\neg A \wedge \neg B$ schreiben, und statt $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$ können wir $A \wedge B \vee C \wedge D$ schreiben.

Tautologien und Umformungen Ein logischer Ausdruck, der unabhängig von den Wahrheitswerten seiner Teilaussagen immer den Wert w besitzt, heißt *Tautologie*. Zum Beispiel sind die folgenden Ausdrücke Tautologien: $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. Dies zeigt man zum Beispiel für die letzte mit einer Wertetabelle für die Teilausdrücke wie folgt:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
f	f	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
w	w	f	f	w	f	f	w

Solche tautologischen Äquivalenzen kann man als Umformungen verwenden und verketten, zum Beispiel wie folgt: $\neg(A \wedge B \vee C) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \wedge \neg C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$.

Die Tautologien $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ zeigen die „Kommutativität“ von $\wedge$ und $\vee$.

Die Tautologien $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ zeigen die „Assoziativität“ von $\wedge$ und $\vee$. Daher sind Ausdrücke der Art $A \wedge B \wedge C$ und $A \vee B \vee C$ sinnvoll.

Die Tautologien $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind die „Distributivgesetze“ der Logik.

Andere wichtige Tautologien sind:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \tag{1.1}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.2}$$
$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B \tag{1.3}$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{1.4}$$

(bei der letzten gilt nicht die Äquivalenz!).

Quantoren Hier wird der Wertebereich von mathematischen Größen festgelegt, auf die sich nachfolgende Aussagen beziehen.

Kurzschreibweise	Bedeutung
$\forall$	„für alle“
$\exists$	„es existiert ein“
$\exists!$	„es existiert genau ein“

Bei der Negation eines Ausdrucks werden die Quantoren $\forall$ und $\exists$ wechselseitig durch den anderen ersetzt. Als Beispiel betrachten wir die Aussage A: „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 0$“ (kurz: $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 0$). Ihre Negation ist demnach in Kurzschreibweise $\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 \geq 0$, d.h. „für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$“.

Weiteres Beispiel: A: „Wer nicht regelmäßig übt, wird niemals eine Klausur bestehen“ (kurz: $\forall x \colon \neg Ux \Rightarrow \neg Kx$. Hier steht x für Personen, Ux für die Aussage „x übt regelmäßig“, und Kx steht für die Aussage „x besteht eine Klausur“). Die Negation von A ist dann $\exists x \colon \neg Ux \wedge Kx$, d.h. „es existiert eine Person, welche gar nicht oder unregelmäßig übt, aber trotzdem mindestens eine Klausur bestehen wird“.

In der Logik müssen Quantoren **vor** die Aussage gesetzt werden, auf die sie sich beziehen. In der Analysis neigt man allerdings dazu, den Quantor $\forall$ („für alle“) der Aussage nachzustellen, da dies zur besseren Lesbarkeit längerer Sätze beiträgt.

Es kommt entscheidend auf die Reihenfolge der Quantoren an, wie man an folgenden - nicht äquivalenten - Aussagen sieht: „Für jede Person existiert ein Tag im Jahr, an dem sie Geburtstag hat“ (*Dies ist wahr).* „Es existiert ein Tag im Jahr, an dem jede Person Geburtstag hat“ (*Dies ist falsch).*

Sätze und Beweise Ein mathematischer Satz ist eine logische Verknüpfung **spezifischer** Aussagen, so dass der Gesamtausdruck immer wahr ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen. Der Unterschied zu einer Tautologie ist, dass beim allgemeinen mathematischen Satz einerseits Quantoren erlaubt sind und dass andererseits in der Regel für die Teilaussagen nur eingeschränkte Ausdrücke eingesetzt werden dürfen. Eine Tautologie ist somit ein mathematischer Satz ohne Quantoren und ohne Einschränkungen an die Gestalt der Teilaussagen.

Oft haben mathematische Sätze die Form $A \Rightarrow B$, oder sie lassen sich darauf zurückführen. Man nennt dann A die *Voraussetzung(en)* und B die *Behauptung* bzw. *Folgerung*.

Beispiel-Satz: Sei $x \in \mathbb{R}$ derart, dass $x \leq y$ gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$. Dann ist $x \leq 0$. Formal: $\forall x \in \mathbb{R}\colon (\forall y \in \mathbb{R}\colon y > 0 \Rightarrow x \leq y) \Rightarrow (x \leq 0)$.

Zum Beweis eines Satzes gibt es verschiedene Strategien:

Direkter Beweis Für einen Satz der Form $A \Rightarrow B$ zeigt man eine Kette von Schlussfolgerungen in der Art $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots A_n \Rightarrow B$, wobei jeder Teilabschnitt „offenbar" wahr ist. Da „$\Rightarrow$" nicht assoziativ ist, ergibt so eine Verkettung eigentlich keinen Sinn. Sie ist zu verstehen als Kurzschreibweise für $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B)$, wobei jede der Teilimplikationen „offenbar" wahr ist. Induktiv liefert die Tautologie (1.4) dann, dass $A \Rightarrow B$ immer wahr ist.

Beweis durch Kontraposition Für einen Satz der Form $A \Rightarrow B$ zeigt man direkt die wegen (1.2) äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis) Man nimmt an, dass die Aussage des Satzes falsch ist, d.h. dass die Negation (das Gegenteil) der Aussage wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch, d.h. eine bekanntermaßen falsche Aussage her. Das zeigt dann, dass die Annahme falsch ist, dass also die Aussage wahr sein muss.

Für den obigen Beispiel-Satz geben wir nun einen indirekten

Beweis. Angenommen, $\exists x \in \mathbb{R}\colon (\forall y \in \mathbb{R}\colon y > 0 \Rightarrow x \leq y) \wedge (x > 0)$ (siehe dazu (1.3)). Sei also ein $x \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $x \leq y$ für alle positiven $y \in \mathbb{R}$ gilt, und so dass $x > 0$ gilt. Dann ist $x/2$ positiv und daher (nimm $y := x/2$) $x \leq x/2 \Leftrightarrow 2x \leq x \Leftrightarrow x \leq 0$, im Widerspruch dazu, dass x positiv ist ϟ! („ϟ" steht für „Widerspruch".) Die Annahme ist also falsch und der Satz damit bewiesen. □

Viele Sätze haben eine komplexere Struktur als $A \Rightarrow B$, z.B. „genau eins von $A_1, A_2, \dots, A_n$ ist wahr" (Alternative) oder „die Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ sind äquivalent". Um Letzteres zu zeigen reicht es, einen „Zirkelschluss" $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$ durchzuführen.

Wir bringen noch zwei weitere Beispiele zu diesen Begriffen.

(a) **Satz:** Unter der Voraussetzung, dass manche Psychologinnen Freud bewundern und dass manche Psychologinnen keine Person mögen, die Freud bewundert, behaupten wir, dass manche Psychologinnen nicht von allen Psychologinnen gemocht werden. „Manche" steht hier für die Existenz *mindestens* einer Person. Es könnte auch *genau* eine Person sein, obwohl wir den Plural verwenden. Wir formalisieren: x, y, z stehen für Personen, Px ist die Aussage, dass x eine Psychologin ist, Fx ist die Aussage, dass x Freud bewundert, und Mxy ist die Aussage, dass x y mag. Dann ist die Aussage des Satzes formal:

$$(\exists x\colon Px \wedge Fx) \wedge (\exists x\colon Px \wedge (\forall y\colon Fy \Rightarrow \neg Mxy)) \\ \Rightarrow \exists x\colon Px \wedge \neg(\forall y\colon Py \Rightarrow Myx).$$

Wir beweisen den Schluss zunächst formal: Zunächst bemerken wir, dass es genügt, aus den Voraussetzungen die äquivalente Behauptung $\exists x\colon Px \wedge (\exists y\colon Py \wedge \neg Myx)$ bzw.

$$\exists x \exists y\colon Px \wedge Py \wedge \neg Myx \tag{1.5}$$

herzuleiten. Sei x so, dass (i) Px und (ii) Fx gelten, und sei y so, dass (iii) Py und (iv) $\forall z\colon Fz \Rightarrow \neg Myz$ gelten. Diese Auswahlen können wir nach den Voraussetzungen treffen.

$$\overset{\text{(ii),(iv)},z:=x}{\Longrightarrow} \neg Myx \overset{\text{(i),(iii)}}{\Longrightarrow} Px \wedge Py \wedge \neg Myx.$$

Somit haben wir (1.5) gezeigt. Sprachlicher Beweis: Sei x eine Psychologin, die Freud bewundert, und sei y eine Psychologin, die keine Person mag, die Freud bewundert. Da x Freud bewundert, mag y x nicht. Da y eine Psychologin ist, mögen nicht alle Psychologinnen x. Da x Psychologin ist, werden also manche Psychologinnen nicht von allen Psychologinnen gemocht.

(b) Manchmal kann eine behauptete Schlussfolgerung durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden: Die Frage, ob daraus, dass manche verrückte Personen Whisky trinken, aber manche Studenten keinen Whisky trinken, folgt, dass manche Studenten nicht verrückt sind, kann man verneinen: Wenn die Grundmenge aller Personen nur aus den zwei Personen a und b besteht, die beide verrückt sind, wo aber nur a Whisky trinkt und nur b Student ist, dann sind die Voraussetzungen erfüllt, aber die Behauptung ist nicht wahr.

Wir haben also mit dem Gegenbeispiel gezeigt, dass die entsprechende formalisierte Aussage

$$(\exists x\colon Vx \wedge Wx) \wedge (\exists x\colon Sx \wedge \neg Wx) \Rightarrow \exists x\colon Sx \wedge \neg Vx$$

falsch ist.

1.2. Mengen

Wir verzichten auf eine präzise Einführung in die Mengenlehre (siehe dazu z. B. Ebbinghaus et al, Zahlen, Kap. 13) und erinnern nur an die wichtigsten Bezeichnungen.

(a) $\varnothing$ bezeichnet die leere Menge.

(b) Aussagen über Mengen und Elemente:

Schreibweise	Bedeutung
$x \in M$	x ist Element der Menge M
$x \notin M$	x ist nicht Element der Menge M
$L \subseteq M$	L ist Teilmenge von M, d.h. $\forall x\colon (x \in L \Rightarrow x \in M)$ bzw. $\forall x \in L\colon x \in M$
$L = M$	$L \subseteq M$ und $M \subseteq L$

(c) Sei M eine Menge.

- Für $L, N \subseteq M$ setzen wir:

$$\begin{aligned} L \cup N &:= \{x \in M \mid x \in L \text{ oder } x \in N\} \\ L \cap N &:= \{x \in M \mid x \in L \,\text{und}\, x \in N\} \\ L \backslash N &:= \{x \in M \mid x \in L \text{ und } x \notin N\} \end{aligned}$$

  Hier und im Folgenden bedeutet $:=$ *immer, dass es sich um eine Definition handelt.*

- *Allgemeiner*: Ist I eine beliebige Indexmenge, und sind $M_i, i \in I$ Teilmengen von M, so setzen wir

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} M_i &:= \{x \in M \mid \text{es existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\} \\ &= \{x \in M \mid x \in M_i \text{ für ein } i \in I\} \\ \bigcap_{i \in I} M_i &:= \{x \in M \mid x \in M_i \text{ für alle } i \in I\} \end{aligned}$$

- Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ von M ist die Menge aller Teilmengen von M. Beispiel: Ist $M = \{1, 2\}$, so ist $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Wir setzen

$$|M| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } M, \text{ falls } M \text{ endlich;} \\ \infty, \text{ falls } M \text{ unendlich (d.h. nicht endlich).} \end{cases}$$

Vorsicht: Diese Definition verlangt, dass wir bereits wissen, was eine endliche Menge ist. Wir haben dies bisher nicht definiert und setzen ein intuitives Verständnis des Endlichkeitsbegriffes voraus.

(d) Für beliebige Mengen L, M ist das *kartesische Produkt* $L \times M$ definiert als die Menge aller (geordneten) Paare (x, y) mit $x \in L$ und $y \in M$.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Beachte, dass z.B. $(1, 2), (2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(1, 2) \neq (2, 1)$.

(e) Mengen können andere Mengen als Elemente enthalten (Beispiel Potenzmenge). Es gibt aber keine „Menge aller Mengen“, und auch keine „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“.

Beachte auch, dass z. B. $1 \in \{1, 2\}$, aber $1 \notin \{\{1\}, 2\}$.

1.3. Abbildungen

Im Folgenden seien stets L, M Mengen.

Definition und Graph Eine Abbildung $f\colon L \to M$ ordnet jedem Element $x \in L$ ein Element $f(x) \in M$ zu. Man schreibt auch kurz $x \mapsto f(x)$, wenn L und M bekannt sind.

f ist eindeutig bestimmt durch den *Graphen*

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in L \times M \mid y = f(x)\} \subseteq L \times M.$$

Man nennt

- L den *Definitionsbereich* von f,
- M den *Wertebereich* von f.

Für $A \subseteq L, B \subseteq M$ sei ferner

- $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in M \mid \exists x \in A\colon f(x) = y\}$ das *Bild* von A unter f,
- $f^{-1}(B) = \{x \in L \mid f(x) \in B\}$ das *Urbild* von B unter f.

Beispiel: Für die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ gilt:

$$f([0,1]) = [0,1] \qquad \text{und} \qquad f^{-1}([0,1]) = [-1,1].$$

Wir zeigen, wie sich Inklusionen unter Abbildung und Urbild verhalten. Zuerst behaupten wir für $C \subseteq D \subseteq M$:

$$f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D). \tag{1.6}$$

Zum Beweis sei $x \in f^{-1}(C)$. Nach Definition von $f^{-1}(C)$ folgt $f(x) \in C$. Wegen $C \subseteq D$ gilt also $f(x) \in D$ und somit $x \in f^{-1}(D)$. Weil $x \in f^{-1}(C)$ beliebig gewählt war, folgt (1.6).

Als nächstes zeigen wir für $A \subseteq B \subseteq L$

$$f(A) \subseteq f(B). \tag{1.7}$$

Sei dazu $y \in f(A)$. Nach Definition von $f(A)$ existiert $x \in A$ so dass $y = f(x)$ gilt. Wegen $A \subseteq B$, ist auch $x \in B$ und daher $y = f(x) \in f(B)$. Da $y \in f(A)$ beliebig gewählt war, folgt $f(A) \subseteq f(B)$.

In der Definition von allgemeinen Vereinigungen und Schnitten von Mengen haben wir eine Familie indizierter Teilmengen $\{M_i \mid i \in I\}$ verwendet. Mit dem Abbildungsbegriff können wir $i \mapsto M_i$ als eine Abbildung $I \to \mathcal{P}(M)$ auffassen.

Injektivität und Surjektivität Eine Abbildung $f\colon L \to M$ heißt

- *injektiv*, falls für alle $x, y \in L$ gilt: $\quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- *surjektiv*, falls $f(L) = M$.
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel: Die Abbildung

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$	ist bijektiv.
$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x$	ist injektiv, nicht surjektiv.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$	ist surjektiv, nicht injektiv.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$	ist weder injektiv noch surjektiv.

Komposition von Abbildungen Ist N eine weitere Menge und sind $f\colon L \to M$, $g\colon M \to N$ Abbildungen, so ist die Abbildung $g \circ f\colon L \to N$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad \text{für } x \in L.$$

Beispiel: $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$. Dann ist $h := g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Die Umkehrabbildung Wir zeigen: Genau dann ist $f\colon L \to M$ bijektiv, wenn eine Abbildung $g\colon M \to L$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_M$ und $g \circ f = \mathrm{id}_L$, wobei

$$\mathrm{id}_L\colon L \to L,\ x \mapsto x, \qquad \mathrm{id}_M\colon M \to M,\ y \mapsto y$$

die *identischen Abbildungen* auf L bzw. M seien.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Wir nehmen an, dass eine Abbildung g mit diesen Eigenschaften existiert. Dann gilt für $x, y \in L$ mit $x \neq y$: $g(f(x)) = \mathrm{id}_L(x) = x \neq y = \mathrm{id}_L(y) = g(f(y))$, also $f(x) \neq f(y)$. Es folgt, dass f injektiv ist. Ferner ist $f(L) = M$: Die Enthaltung „$\subseteq$“ ist trivial (d.h. es folgt unmittelbar aus der Definition), und die Enthaltung „$\supseteq$“ sieht man wie folgt: Sei $y \in M$. Dann ist $y = f(g(y)) \in f(L)$. Es folgt, dass f surjektiv ist. Insgesamt folgt die Bijektivität von f.

„$\Rightarrow$“: Sei nun f bijektiv. Dann besteht für alle $y \in M$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element x_y. Definiere $g\colon M \longrightarrow L$ durch $g(y) = x_y$. Dann hat g die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Der Beweis von „$\Rightarrow$“ zeigt, dass es im Falle der Existenz nur *eine* Abb. g mit den genannten Eigenschaften geben kann. Wir nennen g *die zu f inverse Abbildung*, und schreiben f^{-1} anstelle von g.

2. Die reellen Zahlen

Wir werden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als gegeben nehmen und die Axiome behandeln, durch die sie eindeutig festgelegt ist. Die Konstruktion von $\mathbb{R}$ ist langwierig, wenn man nur von den Axiomen der Mengenlehre ausgeht. Ein System von *Axiomen* ist eine nicht widersprüchliche, minimale Sammlung von grundlegenden Aussagen (Axiomen), die als wahr angenommen werden. Minimal heißt hier, dass keine Teile von Axiomen aus den anderen Axiomen ableitbar sind.

Definition 2.1. Ein Körper K ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+,\ \cdot : K \times K \to K$$

und zwei verschiedenen Elementen $0, 1 \in K$, so dass Folgendes gilt:

(K1) **Assoziativgesetze:** $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$.

(K2) **Kommutativgesetze:** $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in K$.

(K3) $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in K$.

(K4) **Existenz inverser Elemente:** Für jedes $x \in K$ existiert ein $x_1 \in K$ mit $x+x_1 = 0$. Für jedes $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $x_2 \in K \setminus \{0\}$ mit $x \cdot x_2 = 1$.

(K5) **Distributivgesetz:** $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ für alle $x, y, z \in K$.

Man nennt 0 das *Nullelement* und 1 das *Einselement* von K.

Bemerkungen 2.2. Sei K ein Körper.

(a) Die Elemente x_1 und x_2 in (K4) heißen *additives Inverses von x* und *multiplikatives Inverses von x*. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Elemente für festes x eindeutig bestimmt sind. Man bezeichnet sie mit $-x$ und x^{-1}.

(b) Das Multiplikationssymbol $\cdot$ wird meistens weggelassen.

(c) Weitere Rechenregeln, die aus den Körperaxiomen folgen: für $x, y \in K$ gelten:

  (i) $x \cdot 0 = 0$ (insbesondere hat 0 kein multiplikatives Inverses, und $x^{-1} \neq 0$ für $x \neq 0$)

  (ii) $-x = (-1) \cdot x$.

  (iii) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

(iv) $-(x+y) = (-x) + (-y)$.

(v) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1},$ falls $x, y \in K\backslash\{0\}$.

(vi) $-(-x) = x,$ und $(x^{-1})^{-1} = x,$ falls $x \in K \setminus \{0\}$.

(d) Wir definieren $x-y := x+(-y)$ für $x, y \in K$ und $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$ für $x \in K, y \in K\backslash\{0\}$.

Definition 2.3. Wir nennen eine Teilmenge K^+ eines Körpers K *anordnungserzeugend*, falls gelten:

(A1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $x \in K^+$, $x = 0$ oder $-x \in K^+$.

(A2) Sind $x, y \in K^+$, so sind auch $x + y, x \cdot y \in K^+$.

Ein Körper K mit einer fest gewählten, anordnungserzeugenden Teilmenge K^+ heißt *angeordneter Körper*. Wir schreiben dann für $x, y \in K$:

- $x > y,$ falls $x - y \in K^+$;
- $x \geq y,$ falls $x - y \in K^+ \cup \{0\}$;
- $x < y,$ falls $y > x$;
- $x \leq y,$ falls $y \geq x$.

Satz 2.4. *Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist $x^2 := x \cdot x > 0$ für alle $x \in K\backslash\{0\}$. Insbesondere ist $1 = 1 \cdot 1 > 0$.*

Beweis. Sei $x \in K\backslash\{0\}$.

1.Fall: $x > 0 \overset{(A2)}{\Rightarrow} x \cdot x > 0$.

2.Fall: Mit den Regeln (c)(vi) und (c)(ii) aus Bemerkungen 2.2 folgt aus $x < 0$: $x \cdot x = x \cdot (-(-x)) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = (-x) \cdot (-x) > 0$. □

Lemma 2.5. *Sei K ein angeordneter Körper.*

(a) *Für $x, y \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen: $x < y$, $x = y$ oder $x > y$.*

(b) *Für $x, y, z \in K$ gilt:*

(i) *$x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$. Man schreibt dann auch kurz: $x < y < z$.*

(ii) *$x < y \Rightarrow x + z < y + z$.*

(iii) *$x < y$ und $z > 0 \Rightarrow xz < yz$. $x < y$ und $z < 0 \Rightarrow xz > yz$.*

(iv) *$0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.*

(v) *$x = y \Leftrightarrow x \leq y$ und $x \geq y$.*

Beweis. (a) Seien $x, y \in K$. Gemäß (A1) gilt genau eine der drei Aussagen:

$$y - x \in K^+, \qquad y - x = 0, \qquad x - y = -(y - x) \in K^+.$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.

(b) (i) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $y - x, z - y \in K^+$, gemäß (A2) also $z - x = (z - y) + (y - x) \in K^+$. Es folgt $x < z$.

(ii) Aus $x < y$ folgt $(y + z) - (x + z) = y - x \in K^+$, also $x + z < y + z$.

(iii) Es gelte $x < y$, d.h. $y - x \in K^+$. Ist $z > 0$, d.h. $z \in K^+$, so folgt $zy - zx = z(y - x) \in K^+$ gemäß (A2), d.h. $zx < zy$. Ist $z < 0$, d.h. $-z \in K^+$, so folgt gemäß (A2) dann $zx - zy = (-z)(y - x) \in K^+$, also $zy < zx$.

(iv) *Vorbemerkung: Für* $x > 0$ *gilt auch* $x^{-1} > 0$. Wäre nämlich $x^{-1} < 0$, so würde mit (iii) auch $1 = x \cdot x^{-1} < 0$ folgen. Dies widerspricht aber Satz 2.4! Aus

$$(*) \qquad 0 < x < y$$

folgt mit der Vorbemerkung $x^{-1} > 0$ und $y^{-1} > 0$. Multiplikation der Ungleichung $(*)$ mit $x^{-1}y^{-1} > 0$ liefert gemäß (iii) also

$$0 < x^{-1}y^{-1}x < x^{-1}y^{-1}y, \qquad \text{d.h.} \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}.$$

(v) Sei $z = x - y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y = x \iff z = 0 &\overset{\text{(A1)}}{\iff} z \in K^+ \cup \{0\} \wedge -z \in K^+ \cup \{0\} \\ &\iff x \leq y \wedge x \geq y. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 2.6. Aus den Rechenregeln erhält man sofort die Regeln, um Brüche abzuschätzen: Seien $a, b \in K$, $c, d \in K \setminus \{0\}$ mit $a < b$, $c < d$ und $cd > 0$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &< \frac{b}{c} && \text{falls } c > 0 \\ \frac{a}{c} &> \frac{b}{c} && \text{falls } c < 0 \\ \frac{a}{c} &> \frac{a}{d} && \text{falls } a > 0 \\ \frac{a}{c} &< \frac{a}{d} && \text{falls } a < 0. \end{aligned}$$

Um keine Fehler zu machen, sollte man immer nur entweder den Zähler oder den Nenner verändern!

Im Folgenden sei $2 := 1 + 1$. Aus Satz 2.4 und Lemma 2.5(b)(ii) folgt $2 > 1$, und zusammen mit (i) folgt $2 > 0$.

Satz 2.7 (Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (GAM))**.** *Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} && \Big/ \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & 2ab \leq a^2 + b^2 && \Big/ -2ab \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 && \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq (a-b)^2 && \text{Binomische Formel.}
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wegen Satz 2.4 wahr. Somit ist auch die Behauptung wahr. □

Definition 2.8. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

(a)

$$s \in K \text{ heißt } \begin{cases} \textit{obere Schranke} \text{ von } M, \text{ falls } s \geq x \text{ für alle } x \in M. \\ \textit{untere Schranke} \text{ von } M, \text{ falls } s \leq x \text{ für alle } x \in M. \end{cases}$$

Eine obere bzw. untere Schranke s von M heißt *Maximum* bzw. *Minimum* von M, falls $s \in M$ ist.

(b)

$$M \text{ heißt } \begin{cases} \textit{nach oben beschränkt}, \text{ falls es eine obere Schranke von } M \text{ gibt} \\ \textit{nach unten beschränkt}, \text{ falls es eine untere Schranke von } M \text{ gibt.} \end{cases}$$

(c) M heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 2.9. Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$ mit $a \leq b$. Dann ist

$[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ beschränkt.

$(a, b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\}$ beschränkt.

$[a, b) := \{x \in K \mid a \leq x < b\}$ beschränkt.

$(a, b) := \{x \in K \mid a < x < b\}$ beschränkt.

$(-\infty, b] := \{x \in K \mid x \leq b\}$ nach oben, aber nicht nach unten beschränkt.

$(-\infty, b) := \{x \in K \mid x < b\}$ nach oben, aber nicht nach unten beschränkt.

$[a, \infty) := \{x \in K \mid x \geq a\}$ nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

$(a, \infty) := \{x \in K \mid x > a\}$ nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

Insbesondere ist b eine obere Schranke und a eine untere Schranke der Mengen $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b). Exemplarisch zeigen wir, dass die Menge $N := (-\infty, b)$ nicht nach unten beschränkt ist: Angenommen, N besäße eine unter Schranke $s \in \mathbb{R}$. Wegen $b - 1 < b$ ist $b - 1 \in N$ und somit $s - 1 < s \leq b - 1 < b$. Es folgt $s - 1 \in N$ und somit $s \leq s - 1$ ↯! Also ist N nicht nach unten beschränkt.

Diese Besipiele führen uns auf folgende

Definition 2.10. Eine Teilmenge I eines angeordneten Körpers K heißt *Intervall*, falls für alle $x, y \in I$ und $z \in K$ die Implikation

$$x < z < y \Rightarrow z \in I$$

gilt.

Alle Mengen in Beispiel 2.9 sind Intervalle.

Definition 2.11. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

(i) Eine obere Schranke $s \in K$ von M heißt *Supremum* von M, falls $s \leq \tilde{s}$ für alle oberen Schranken $\tilde{s}$ von M. Mit anderen Worten: s ist eine kleinste obere Schranke von M.

(ii) Eine untere Schranke $s \in K$ von M heißt *Infimum* von M, falls $s \geq \tilde{s}$ für alle unteren Schranken $\tilde{s}$ von M. Mit anderen Worten: s ist eine größte untere Schranke von M.

Bemerkung 2.12. Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

(a) Im Falle der Existenz(!) ist das Maximum, Minimum, Supremum bzw. Infimum von M wegen Lemma 2.5(b)(v) eindeutig bestimmt, und wir nennen diese Elemente $\max M, \min M, \sup M$ bzw. $\inf M$.

(b) Existiert $\max M$, so ist $\max M$ offenbar die kleinste obere Schranke von M, d.h. in diesem Fall gilt $\max M = \sup M$. Analoges gilt für $\min M$ und $\inf M$.

Beispiel 2.13. Sei K ein angeordneter Körper.

(a) Für $M := \{x \in K \mid x < 0\}$ gilt $\sup M = 0$, und M besitzt kein Maximum.

(b) Für $N := \left\{\frac{2x}{1+x} \,\middle|\, x \in K,\ x \geq 1\right\}$ gilt

$$\min N = \inf N = 1 \qquad \text{und} \qquad \sup N = 2.$$

Ferner besitzt N kein Maximum.

Beweis. **(a)** *Vorbemerkung:* Wegen $2 > 1 > 0$ ist

$$0 < \frac{1}{2} < 1. \tag{2.1}$$

Zunächst ist 0 eine obere Schranke von M, da $0 \geq x$ für alle $x \in M$. Ferner hat M keine kleinere obere Schranke, denn für $s \in K$ mit $s < 0$ ist $s < \frac{s}{2} < 0$ gemäß (2.1) und Lemma 2.5(b)(iii). Also ist $\frac{s}{2} \in M$ und somit ist s keine obere Schranke von M. Es folgt $0 = \sup M$, und somit ist $\sup M \notin M$. Mit Bemerkung 2.12(b) folgt, dass $\max M$ nicht existiert.

(b) Für $x \in K$, $x \geq 1$ ist $1 + x \leq 2x < 2(1 + x)$ und somit $1 \leq \frac{2x}{1+x} < 2$; also folgt

$$1 \leq t < 2 \qquad \text{für } t \in N. \tag{2.2}$$

Somit ist 1 eine untere Schranke und 2 eine obere Schranke von N. Wegen $1 = \frac{2\cdot 1}{1+1} \in N$ folgt $\min N = \inf N = 1$ gemäß Bemerkung 2.12(b). Wir zeigen nun, dass 2 die kleinste obere Schranke von N ist. Angenommen, es gäbe eine obere Schranke $s < 2$ von N. Dann ist $s \geq \min N = 1$. Betrachte $t := \frac{s+2}{2} \in (s, 2)$ und $x := \frac{t}{2-t}$. Wegen $2 > t > s \geq 1$ ist $2 - t > 0$ und somit

$$x = \frac{t}{2-t} > \frac{1}{2-t} > \frac{1}{2-1} = 1.$$

Nun ist x so gewählt, dass

$$t = \frac{2x}{1+x}$$

gilt und daher $t \in N$ ist. Wegen $t > s$ ist s somit keine obere Schranke von N ↯! Es folgt $\sup N = 2$. Wegen (2.2) ist aber $2 \notin N$, somit besitzt N kein Maximum. □

Definition 2.14. Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig*, falls gilt:

(V) Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum in K.

Satz 2.15 (Hauptsatz über die Existenz von $\mathbb{R}$)**.** *Es existiert ein vollständiger angeordneter Körper $\mathbb{R}$, dessen Struktur in folgender Weise eindeutig bestimmt ist: Ist K ein weiterer vollständiger angeordneter Körper, so existiert eine bijektive Abbildung $f\colon K \to \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \qquad\qquad \textit{für alle } x, y \in K. \\ x < y &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

Beweis Ebbinghaus et. al., Zahlen, Kapitel 1.

Bemerkung 2.16. Den Körper $\mathbb{R}$ aus Satz 2.15 nennen wir *den Körper der reellen Zahlen*. Er wird durch die Axiome (K1)–(K5), (A1), (A2) und (V) charakterisiert.

Satz 2.17. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $M \neq \varnothing$. Dann existiert* $\inf M$.

Beweis. Wir setzen $-M := \{-x \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt für $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & s \text{ ist untere Schranke von } M \\ & \Leftrightarrow s \leq x \text{ für alle } x \in M \\ & \Leftrightarrow -s \geq -x \text{ für alle } x \in M \\ & \Leftrightarrow -s \geq y \text{ für alle } y \in -M \\ & \Leftrightarrow -s \text{ ist obere Schranke von } -M. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Insbesondere ist $-M$ nach oben beschränkt, also existiert $\sup(-M)$ nach (V). Nun ist $\sup(-M)$ die kleinste obere Schranke von $-M$. Wegen (2.3) ist dann $-\sup(-M)$ die größte untere Schranke von M. Folglich existiert $\inf M = -\sup(-M)$. □

Bemerkung 2.18. Es ist üblich, $\inf \varnothing := \infty$ und $\sup \varnothing := -\infty$ zu schreiben. Für Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ schreibt man ferner

- $\sup M := \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt, und
- $\inf M := -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt.

Vorsicht: Hierbei handelt es sich nur um formale Schreibweisen, die Zahlen $\sup M$ und $\inf M$ existieren in diesen Fällen nicht.

3. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Bemerkung 3.1. Es ist naheliegend, die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als Menge der Zahlen

$$1, \quad 2 := 1+1, \quad 3 := 2+1, \quad 4 := 3+1, \quad \dots \quad \in \mathbb{R}$$

zu definieren. Was aber bedeutet hier „...“? Dieses „unendliche Abzählen“ werden wir nun präzisieren.

Definition 3.2. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, falls gilt:

(i) $1 \in M$

(ii) Ist $n \in M$, so ist auch $n+1 \in M$

Beispiel 3.3. Das Intervall $[c, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist induktiv, falls $c \leq 1$.

Definition 3.4. Wir setzen

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subseteq \mathbb{R} \\ M \text{ induktiv}}} M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Element jeder induktiven Teilmenge von } \mathbb{R}\}$$

und nennen $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Wir setzen ferner $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bemerkung 3.5. $\mathbb{N}$ ist selbst induktiv, denn

(i) $1 \in \mathbb{N}$

(ii) Ist $n \in \mathbb{N}$, also n Element jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann ist $n+1$ Element jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ und daher $n+1 \in \mathbb{N}$.

Ferner ist $\mathbb{N} \subseteq [1, \infty)$, da $[1, \infty)$ induktiv ist. Es folgt $\min \mathbb{N} = 1$. Des Weiteren gilt das *Induktionsprinzip*:

Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und ist M induktiv, so ist $M = \mathbb{N}$.

Als Folge dieses Prinzips kann man z.B. mathematische Objekte für alle $n \in \mathbb{N}$ *induktiv* definieren.

Definition 3.6. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := \begin{cases} a_1, & \text{falls } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n, & \text{falls } n > 1 \end{cases} =: a_1 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := \begin{cases} a_1, & \text{falls } n = 1 \\ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot a_n, & \text{falls } n > 1 \end{cases} =: a_1 \cdot \cdots \cdot a_n,$$

wobei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben seien.

Beachte: Diese Symbole sind für eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ wohldefiniert, also für ganz $\mathbb{N}$.

(b) $n! := \prod_{k=1}^{n} k$, und $0! = 1$ (*Fakultät*)

(c) für $x \in \mathbb{R}$: $x^n := \begin{cases} x, & \text{falls } n = 1 \\ x^{n-1} \cdot x, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases} = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{\text{n-mal}}$, und $x^0 := 1$ (*n-te Potenz*)

Satz 3.7 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)**.** *Seien Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$ derart gegeben, dass gilt:*

(IV) *$A(1)$ ist wahr.* (Induktionsverankerung)

(IS) *Ist $A(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(n+1)$.* (Induktionsschritt)

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ wahr}\} \subseteq \mathbb{N}$. Gemäß (IV) ist $1 \in M$. Ferner gilt:

$$n \in M \;\Rightarrow\; A(n) \text{ wahr} \overset{\text{(IS)}}{\Rightarrow} A(n+1) \text{ wahr} \;\Rightarrow\; n+1 \in M.$$

Es folgt, dass M induktiv ist und damit $M = \mathbb{N}$. □

Bemerkung 3.8 (Kurzschreibweisen)**.** Man schreibt oft

„$n = 1$“ anstelle von „Induktionsverankerung“ (IV)

„$n \Rightarrow n+1$“ anstelle von „Induktionsschritt“ (IS).

Die Annahme „$A(n)$ ist wahr“ im Induktionsschritt nennt man die *Induktionsannahme* (kurz: I.A.).

Beispiel 3.9. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis per Induktion. „$n = 1$“: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
„$n \Rightarrow n+1$“: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. □

Satz 3.10. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) $k + n \in \mathbb{N}$

(b) $k \cdot n \in \mathbb{N}$

(c) *Ist $n > k$, so ist $n - k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. **(a):** Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Per Induktion nach n zeigen wir:

$$k + n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

„$n = 1$“: Da $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ induktiv ist, ist auch $k + 1 \in \mathbb{N}$.

„$n \Rightarrow n + 1$“: $k + (n + 1) = \underbrace{k + n}_{\in \mathbb{N} \text{nach } I.A.} +1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv.

(b): Übung

(c): *Vorbemerkung:* Die Menge $M := \{1\} \cup \{x \in (1, \infty) \mid x - 1 \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist induktiv, also $\mathbb{N} \subseteq M$. Daraus folgt:

$$n - 1 \in \mathbb{N} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n > 1. \tag{3.1}$$

Wir betrachten nun für $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, ist $n - k \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wahr ist. Beweis per Induktion nach k:

„$k = 1$“: Wahr gemäß (3.1).

„$k \Rightarrow k + 1$“: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > k + 1$. Dann ist $n > k$, also $n - k \in \mathbb{N}$ nach Induktionsannahme. Dabei ist $n - k > 1$, also wegen (3.1):

$$n - (k + 1) = (n - k) - 1 \in \mathbb{N}$$

□

Korollar 3.11. *Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{N} \cap (n, n + 1) = \varnothing$.*

Beweis. Ist $k \in \mathbb{N}$ und $k > n$, so folgt $k - n \in \mathbb{N}$ nach Satz 3.10(c), also $k - n \geq 1$ da $\min \mathbb{N} = 1$ und somit $k \geq n + 1$. Folglich ist $\mathbb{N} \cap (n, n + 1) = \varnothing$. □

Satz 3.12 (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)**.** *Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und $M \neq \varnothing$, so existiert* $\min M$*, d.h. M besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Wegen $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{N}$ und Satz 2.17 existiert $t := \inf M \geq \min \mathbb{N} = 1$. Nach Definition des Infimums ist $t+1$ keine untere Schranke von M, d.h. es existiert $n \in M$ mit $n < t+1$. Für beliebiges $m \in M$ ist nun $m \geq t$, also $m+1 \geq t+1 > n$. Da $m+1 \in \mathbb{N}$ ist, folgt gemäß Korollar 3.11 nun $m + 1 \geq n + 1$, d.h. $m \geq n$. Es folgt $n = \min M = t$. □

Satz 3.13. $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. Dann existiert $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ wegen Axiom (V). Somit ist $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, d.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Für dieses n gilt dann $n + 1 \in \mathbb{N}$ und $n + 1 > s$, im Widerspruch zu $s = \sup \mathbb{N}$. $\square$

Korollar 3.14. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu Satz 3.13. $\square$

Definition 3.15. Die Menge der *ganzen Zahlen* ist definiert durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, wobei $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei.

Satz 3.16. *Seien $k, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(a) $k + n \in \mathbb{Z}, \quad k - n \in \mathbb{Z}, \quad k \cdot n \in \mathbb{Z}$

(b) $k - n \in \mathbb{N}$, *falls* $k > n$

(c) $\mathbb{Z} \cap (n, n + 1) = \varnothing$

Beweis. Dies folgt leicht aus Satz 3.10 und Korollar 3.11 durch Fallunterscheidung. $\square$

Korollar 3.17. *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $M := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$. Dann ist die Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow M, \qquad f(n) = n + n_0 - 1$$

bijektiv.

Beweis. Offensichtlich ist f injektiv. Zur Surjektivität: Sei $m \in M$. Es folgt $m + 1 > n_0$. Satz 3.16(b) bedingt $m+1-n_0 \in \mathbb{N}$, wobei $f(m+1-n_0) = m$. Dies liefert die Surjektivität von f. $\square$

Definition 3.18 (in Ergänzung zu Definition 3.6)**.** (a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, sei $x^n := \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$.

(b) Für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \leq m$ und $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$, sei

$$\sum_{k=n}^{m} a_k := \sum_{k=1}^{m-n+1} a_{k+n-1} = a_n + \cdots + a_m$$

$$\prod_{k=n}^{m} a_k := \prod_{k=1}^{m-n+1} a_{k+n-1} = a_n \cdot \cdots \cdot a_m$$

Satz 3.19 (Variante der vollständigen induktion)**.** *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und seien Aussagen $A(n), n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ gegeben mit:*

(IV) $A(n_0)$ *ist wahr.* (Induktionsverankerung)

(IS) *Ist $A(n)$ wahr für ein ein $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, so auch $A(n+1)$.* (Induktionsschritt)

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

Beweis. Setze $B(n) = A(f(n))$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei f die Abbildung aus Korollar 3.17 sei. Dann erfüllen die Aussagen $B(n), n \in \mathbb{N}$, die Voraussetzungen von Satz 3.7. Es folgt: $B(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f bijektiv ist, ist somit auch $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$. □

Satz 3.20. *Für $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt:*

$$(1+x)^n > 1 + nx \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung)}$$

Beweis per Induktion. „$n = 2$“: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, da $x \neq 0$, also $x^2 > 0$.

„$n \Rightarrow n+1$“: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{\text{I.A.}}{>} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$. □

Satz 3.21. *Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

(a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(b) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(c) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Beweis. Dies folgt per Induktion (als Übung empfohlen). □

Satz 3.22. *Für $a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) *Sind $a, b > 0$, so gilt $(a < b \Leftrightarrow a^n < b^n)$.*

(b) $a > 1,\ m > n \ \Rightarrow\ a^m > a^n > 1$.

(c) $0 < a < 1,\ m > n \ \Rightarrow\ 0 < a^m < a^n < 1$.

Beweis. **(a):** Zunächst liefert ein einfacher Induktionsbeweis, dass immer $a^n > 0$ gilt. Jetzt beweisen wir durch Induktion nach n:

„$n = 1$“: trivial.

„$n \Rightarrow n+1$“: Sei zunächst $a < b$. Per Induktionsannahme folgt $a^n < b^n$. $a^n > 0$ liefert $a^{n+1} = a^n \cdot a < a^n \cdot b \overset{I.A.}{<} b^n \cdot b = b^{n+1}$. Sei nun $b < a$. Dann folgt genauso $b^{n+1} < a^{n+1}$. Ist schließlich $b = a$, so folgt $b^{n+1} = a^{n+1}$.

(b) und (c) zur Übung empfohlen. □

Definition 3.23 (Binomialkoeffizienten)**.** Für $n \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., n\}$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Hierbei ist $\{0, \ldots, n\}$ eine Kurzschreibweise für $\{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq n\}$. Man schreibt auch „für $k = 0, \ldots, n$“ anstelle von „für $k \in \{0, \ldots, n\}$“.

Bemerkung 3.24. (a) Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Speziell erhält man

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(b) $\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot n}{k!}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, insbesondere also eine natürliche Zahl. Zum Beweis siehe z.B. O. Forster, Analysis I, Seite 5.

Lemma 3.25. *Für $n \in \mathbb{N}, k = 1, ..., n$ gilt*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\Big(k + (n-k+1)\Big) = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

□

Randbemerkung: *Eine gute Merkhilfe zur Berechnung kleiner Binomialkoeffizienten ist das* Pascalsche Dreieck*:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Satz 3.26 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis. Induktion nach n:

„$n = 1$“:

$$a + b = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \qquad \checkmark$$

„$n \Rightarrow n+1$“:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&\overset{\text{I.A.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^{n+1} \\
&= \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

Hier haben wir im vorletzten Schritt Lemma 3.25 verwendet.

$\square$

Korollar 3.27. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Dies folgt aus Satz 3.26 durch Einsetzen der Zahlen $a = 1$ und $b = 1$ bzw. $b = -1$.

4. Rationale Zahlen und n-te Wurzeln

Definition 4.1. Die Menge der *rationalen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Man überprüft leicht, dass $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$ ist. Wir werden in diesem Kapitel feststellen, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist und sich somit von $\mathbb{R}$ unterscheidet. Wie die beiden folgenden Sätze zeigen, unterscheiden sich $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ insbesondere bzgl. der Existenz von Wurzeln.

Satz 4.2. *Es gibt kein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$. Da $r^2 = (-r)^2$ ist, können wir ohne Einschränkung $r > 0$ annehmen. Nach Satz 3.22 gilt $1 < r < 2$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $mr \in \mathbb{Z}$; dies geht wegen Satz 3.12. Sei $p := m(r-1)$. Wegen $r - 1 \in (0,1)$ ist dann $0 < p < m$; ferner ist $p = mr - m \in \mathbb{Z}$. Somit ist $p \in \mathbb{N}$, wobei

$$pr = m(r-1)r = m(r^2 - r) = \underbrace{2m}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{mr}_{\in \mathbb{Z}}$$

ebenfalls eine ganze Zahl ist. Dies widerspricht der minimalen Wahl von m. $\square$

Satz 4.3 (Existenz n-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$)**.** *Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ mit $x^n = a$. Wir schreiben $x =: \sqrt[n]{a}$ und nennen x die n-te Wurzel von a.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a > 0$ und $n \geq 2$ (sonst ist die Behauptung klar).

Existenz: Sei $M := \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0, y^n \leq a\}$. Dann gilt:

- $M \neq \varnothing$, da $0 \in M$.
- M ist nach oben beschränkt, denn für $y \in M$ gilt $y \leq 1$ oder $1 < y \overset{\text{Satz 3.22}}{<} y^n \leq a$. Es folgt, dass $\max\{1, a\}$ eine obere Schranke von M ist.

Gemäß Axiom (V) existiert $x = \sup M \in [0, \infty)$. **Behauptung:** $x^n = a$.

(i) Angenommen, $x^n > a$. Dann ist $x > 0$, und nach Korollar 3.14 existiert $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{j} < \min\left\{x, \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}\right\}$. Mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 3.20) erhält man

$$\left(x - \frac{1}{j}\right)^n = x^n \left(1 - \frac{1}{jx}\right)^n \geq x^n \left(1 - \frac{n}{jx}\right) = x^n - \frac{n}{j} x^{n-1} \geq a$$

und somit $(x - \frac{1}{j})^n \geq y^n$ für alle $y \in M$. Mit Satz 3.22 folgt $x - \frac{1}{j} \geq y$ für alle $y \in M$. Also ist $x - \frac{1}{j}$ eine obere Schranke von M, wobei $x - \frac{1}{j} < x$. $\lightning$ zu $x = \sup M$.

(ii) Angenommen, $x^n < a$. Nach Korollar 3.14 existiert $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{j} < \frac{a-x^n}{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k}}$. Es folgt mit Satz 3.26

$$\left(x + \frac{1}{j}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \left(\frac{1}{j}\right)^k = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \underbrace{\left(\frac{1}{j}\right)^k}_{\leq \frac{1}{j}}$$

$$\leq x^n + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} < x^n + (a - x^n) = a.$$

Somit ist $x + \frac{1}{j} \in M$, also ist x keine obere Schranke von M. ϟ

Insgesamt haben wir $x^n = a$ gezeigt, wie behauptet.

Eindeutigkeit: Für $y, z \in [0, \infty)$ gilt nach Satz 3.22 (und wegen $0^n = 0$):

$$y > z \qquad \Rightarrow \qquad y^n > z^n.$$

Also existiert höchstens ein $x \in [0, \infty)$ mit $x^n = a$. □

Definition 4.4 (Rationale Potenzen)**.** Für $a \in (0, \infty), n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$. Dies ist wohldefiniert, denn: Seien $n, k \in \mathbb{Z}$, $m, \ell \in \mathbb{N}$ gegeben mit $\frac{n}{m} = \frac{k}{\ell}$. Zu zeigen ist

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\ell]{a^k}. \tag{4.1}$$

Dies ist klar, falls $n = 0$ und damit auch $k = 0$. Sei also nun $n \neq 0, k \neq 0$. Ohne Einschränkung können wir $n, k \in \mathbb{N}$ annehmen, da $a^n = (\frac{1}{a})^{-n}$ und $a^k = (\frac{1}{a})^{-k}$. Es ist $(\sqrt[m]{a^n})^{km} = a^{nk} = (\sqrt[\ell]{a^k})^{nl} = (\sqrt[\ell]{a^k})^{km}$, da $nl = km$. Da $km \in \mathbb{N}$, folgt nun (4.1) aus der Eindeutigkeit der km-ten Wurzel (siehe Satz 4.3).

Satz 4.5. *Für $a, b \in (0, \infty)$, $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:*

(a) $a^{r+s} = a^r a^s$.

(b) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(c) $(ab)^r = a^r b^r$.

(d) *Ist $r > 0$, so ist $a < b$ genau dann, wenn $a^r < b^r$.*

(e) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s, & \textit{falls } a > 1, \\ a^r > a^s, & \textit{falls } 0 < a < 1. \end{cases}$

Beweis. **(a):** Schreibe $r = \frac{n}{m}$, $s = \frac{k}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n, k \in \mathbb{Z}$, also $r + s = \frac{n+k}{m}$. Dann gilt nach Satz 3.21:

$$(a^r a^s)^m = (\sqrt[m]{a^n})^m (\sqrt[m]{a^k})^m = a^n a^k = a^{n+k} = (a^{r+s})^m, \qquad \text{also} \qquad a^r a^s = a^{r+s}.$$

Der Rest verbleibt als Übung. □

Satz und Definition 4.6. *Für $x \in \mathbb{R}$ existiert $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \in \mathbb{Z}$. Man nennt $[x]$ die* Gaußklammer *von x. Es gilt $[x] \leq x < [x] + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $M := \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Dann ist M nach oben beschränkt und nicht leer, denn wegen Satz 3.13 existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, d.h. $-n \in M$. Gemäß Axiom (V) existiert $s = \sup M \in \mathbb{R}$. Da $s - 1$ keine obere Schranke von M ist, existiert $k_0 \in M$ mit $s - 1 < k_0 \leq s$. Also ist $k_0 + 1 > s$, und ferner ist $M \cap (k_0, k_0 + 1) = \varnothing$ nach Satz 3.16(c). Es folgt: k_0 ist eine obere Schranke von M, also $s = k_0 = \max M$. Insbesondere ist $k_0 + 1 \notin M$, also $k_0 \leq x < k_0 + 1$, wie behauptet. $\square$

Satz 4.7. *Sind $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, so existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$. Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist (vgl. Satz 3.13), existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y-x}$. Gemäß Satz und Definition 4.6 gilt für dieses $n \in \mathbb{N}$ dann

$$ny > nx + 1 \geq [nx] + 1 > nx, \qquad \text{mit } q := \frac{[nx] + 1}{n} \in \mathbb{Q} \text{ also } \qquad y > q > x.$$

$\square$

Bemerkung 4.8. (a) Aus Satz 4.7 folgt:

$$\sup\big((x, y) \cap \mathbb{Q}\big) = y \text{ für jedes Intervall } (x, y) \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } x < y. \quad \text{(Übung)}$$

Wählt man z.B. $x = 0, y = \sqrt{2}$, so ist also $\sup\big((0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}\big) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nach Satz 4.2. Daraus kann man ableiten, dass die nichtleere beschränkte Teilmenge $(0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt und somit der angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.

(b) Aus Satz 4.7 folgt auch, dass man jede reelle Zahl y beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren kann, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $q \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$.

5. Die komplexen Zahlen

Bemerkung 5.1. Die reellen Zahlen sind zwar im analytischen Sinne vollständig, aber nicht bzgl. der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen. Insbesondere hat die Gleichung $z^2 = -1$ keine Lösung $z \in \mathbb{R}$. Nehmen wir mal an, es gäbe einen Körper, welcher $\mathbb{R}$ enthält (mit demselben Eins- und Nullelement) und in dem auch eine Lösung i der obigen Gleichung existiert. Dann kann man auch jede andere quadratische Gleichung in diesem Körper lösen, z.B. wird für jedes $c > 0$ die Gleichungen $z^2 = -c$ durch $z = \mathrm{i}\sqrt{c}$ und $z = -\mathrm{i}\sqrt{c}$ gelöst. Man kann dann sogar *jede beliebige* algebraische Gleichung in diesem Körper lösen, aber diesen wichtigen Satz (*Fundamentalsatz der Algebra*) werden wir erst sehr viel später beweisen. Ferner gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in diesem Körper dann

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

und

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}^2bd + \mathrm{i}(bc + ad) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad),$$

d.h. die Teilmenge $\mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R} := \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist dann abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation. Ferner liefert Ausmultiplizieren im Falle $a \neq 0$ oder $b \neq 0$

$$(a + \mathrm{i}b) \underbrace{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}\right)}_{(a+\mathrm{i}b)^{-1}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

d.h. die Menge $\mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R}$ ist auch bezüglich der Inversenbildung abgeschlossen und bildet somit selbst einen Körper. Wir werden nun einen solchen Körper konstruieren, in dem man jedes Element in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben und in dem man somit in dieser Form rechnen kann. Wir gewinnen dadurch aber noch viel mehr, nämlich eine Übersetzung von Operationen der ebenen Geometrie in algebraische Rechnungen. Die zugrundeliegende Idee ist grob gesagt die folgende *(u.a. auf Caspar Wessel 1797, Jean-Robert Argand 1806 und Carl-Friedrich Gauß 1811 zurückgehend)*: *Da die Multiplikation mit* -1 *eine Spiegelung des Zahlenstrahls am Ursprung ist, muss (?) die Multiplikation mit* i *die Rolle einer Drehung um 90 Grad in einer „Zahlenebene“ darstellen. Randbemerkung:* Die folgende algebraische Konstruktion der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen geht auf William Rowan Hamilton (1805-1865) zurück.

Definition 5.2. Auf der Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)\end{aligned}$$

für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

Satz und Definition 5.3. *Mit den Verknüpfungen aus Definition 5.2 wird* $\mathbb{R}^2$ *ein Körper, welcher* Körper der komplexen Zahlen *genannt und mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet wird. Hierbei ist* $(0,0)$ *das Nullelement und* $(1,0)$ *das Einselement in* $\mathbb{C}$.

Nachweis der Körperaxiome. **Zu (K1) und (K2):** Da komponentenweise definiert, ist die Addition in $\mathbb{C}$ offensichtlich kommutativ und assoziativ. Zur Multiplikation: Seien $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) = (a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1)$$

und

$$\begin{aligned}\big((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)\big)\cdot(a_3,b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)\cdot(a_3,b_3)\\ &= \Big((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3\Big)\\ &= \Big(a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(b_2a_3 + a_2b_3), a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)\Big)\\ &= (a_1,b_1)\cdot(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1,b_1)\cdot\big((a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)\big).\end{aligned}$$

Zu (K3): Für $(a,b)\in\mathbb{C}$ ist

$$(a,b) + (0,0) = (a,b) \qquad \text{und} \qquad (a,b)\cdot(1,0) = (a,b).$$

Zu (K4): Ist $(a,b)\in\mathbb{C}$, so ist $(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$ das Nullelement in $\mathbb{C}$. Ist ferner $(a,b) \neq (0,0)$, so ist $a^2 + b^2 > 0$ und $(a,b)\cdot\big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\big) = (1,0)$ das Einselement in $\mathbb{C}$. Das Distributivgesetz **(K5)** verbleibt als Übung. □

Bemerkung 5.4. Alle Begriffe und Rechenregeln für Körper, die wir ohne die Existenz einer Anordnung eingeführt oder bewiesen haben, gelten auch für die komplexen Zahlen. Insbesondere sind ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen wohldefiniert, und Satz 3.21 gilt auch für komplexe Zahlen a und b. Potenzen mit komplexer Basis und rationalem Exponenten können wir nicht allgemein wie für reelle Basen definieren, da wir dort die Anordnung von $\mathbb{R}$ verwendet haben.

Bemerkung 5.5 (Wichtig!)**.** Die Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{C}, a\mapsto(a,0)$ ist injektiv und strukturerhaltend, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}(a_1,0) + (a_2,0) &= (a_1 + a_2, 0)\\ (a_1,0)\cdot(a_2,0) &= (a_1\cdot a_2, 0)\end{aligned} \qquad \text{für } a_1,a_2\in\mathbb{R}.$$

Ferner bildet diese Abbildung $0\in\mathbb{R}$ bzw. $1\in\mathbb{R}$ auf das Nullelement bzw. Einselement in $\mathbb{C}$ ab. Man identifiziert daher $\mathbb{R}$ mit der Menge $\{(a,0) \mid a\in\mathbb{R}\}$ und fasst $\mathbb{R}$ somit als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf. Dies hat unter anderem den Vorteil, dass alle Definitionen bzw. Aussagen für komplexe Zahlen auch automatisch für reelle Zahlen erklärt sind bzw. gelten. Setzt man ferner $\mathrm{i} := (0,1)\in\mathbb{C}$, so kann man jede komplexe Zahl eindeutig schreiben als

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0) = a + \mathrm{i}b \text{ mit } a,b\in\mathbb{R}.$$

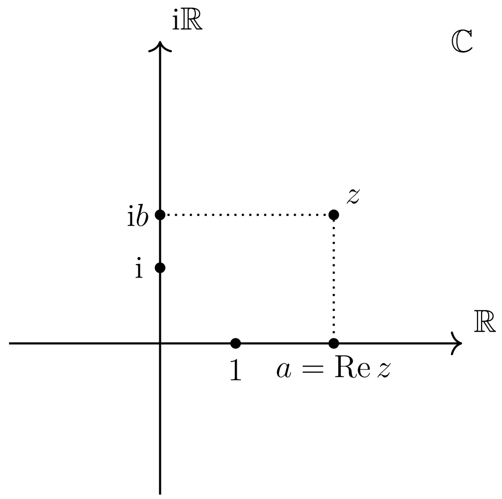

Abbildung 5.1.: Komplexe Zahlenebene

Beachtet man nun, dass $\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, so braucht man nicht mehr mit Tupeln (a,b) zu rechnen. Es gilt dann

$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

für $a_1 + \mathrm{i}b_1, a_2 + \mathrm{i}b_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

Definition 5.6. Für $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sei

(a) $\operatorname{Re} z := a$ der *Realteil von z*,
$\operatorname{Im} z := b$ der *Imaginärteil von z*,

(b) $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der *Betrag* von z,

(c) $\bar{z} := a - \mathrm{i}b$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ heißt *komplexe Konjugation.*

Bemerkung 5.7. (a) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist. Ferner sind äquivalent:

$$\text{(i) } z \in \mathbb{R} \text{ (ii) } \operatorname{Re} z = z \text{ (iii) } \operatorname{Im} z = 0 \text{ (iv) } z = \bar{z}.$$

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $|a| = \sqrt{a^2} = \max\{a, -a\}$.

Bemerkung 5.8 (zur komplexen (bzw. Gaußschen) Zahlenebene)**.** Es ist nützlich, sich komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) als Punkte in der Ebene vorzustellen, siehe Abb. 5.1:

- Die reellen Zahlen bilden die horizontale Koordinatenachse (*reelle Achse*). $\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}b \mid b \in \mathbb{R}\}$ bildet die vertikale Koordinatenachse (*imaginäre Achse*).

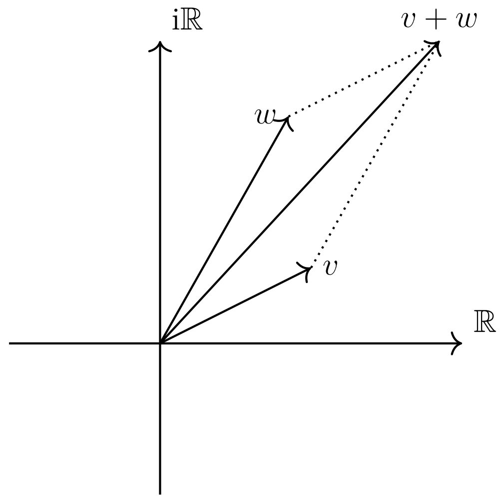

Abbildung 5.2.: Komplexe Addition

- Der Punkt $\bar{z}$ ist die Spiegelung von z an der reellen Achse.
- $|z|$ stellt den Abstand von z zum Ursprung $0 \in \mathbb{C}$ dar.
- Die Addition entspricht der „elementaren Vektoraddition“, siehe Abb. 5.2.
- Die geometrische Bedeutung der Multiplikation werden wir später kennenlernen.

Satz 5.9. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

(b) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$.

(c) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z$.

(d) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, *also auch* $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

(e) $|zw| = |z||w|$.

(f) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *und* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(g) $|z+w| \leq |z| + |w| \qquad$ (Dreiecksungleichung).

(h) $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. Sei $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = c + \mathrm{i}d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$, $\bar{w} = c - \mathrm{i}d$, $z + w = (a+c) + \mathrm{i}(b+d)$ und $z \cdot w = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$.

(a) Dies folgt, da $z + \bar{z} = 2a = 2 \operatorname{Re} z$ und $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i} \operatorname{Im} z$.

(b) Dies ist klar.

(c) $\overline{z+w} = \overline{(a+c) - \mathrm{i}(b+d)} = a - \mathrm{i}b + c - \mathrm{i}d = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = (ac-bd) - \mathrm{i}(ad+bc) = \bar{z} \cdot \bar{w}$ und $\bar{\bar{z}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = \overline{a + \mathrm{i}(-b)} = a - \mathrm{i}(-b) = a + \mathrm{i}b$.

(d) $z\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = |z|^2$, also auch $|\bar{z}|^2 = \bar{z}\bar{\bar{z}} \overset{(c)}{=} \bar{z}z = |z|^2$.

(e) $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 \overset{|\cdot| \geq 0}{\Rightarrow} |zw| = |z||w|$.

(f) $(\operatorname{Re} z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow |\operatorname{Re} z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} \leq |z|$. Ebenso: $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(g)

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + 2|zw| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Es folgt: $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(h) Wir haben $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w|$, also $|z| - |w| \leq |z-w|$. Genauso zeigt man $|w| - |z| \leq |w-z| = |z-w|$. Es folgt $\big||z| - |w|\big| = \max\big\{|z|-|w|, |w|-|z|\big\} \leq |z-w|$.

□

Bemerkung 5.10. Aus Satz 5.9(c) und (e) folgt für $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} \cdot \bar{w} = \overline{\left(\frac{1}{w} \cdot w\right)} = \bar{1} = 1,$$

also

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}}.$$

Das liefert

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{w} \cdot z\right)} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} \cdot \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}} \cdot \bar{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

und

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z}{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2},$$

also

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

Beispiel 5.11. Sei $z = \frac{2+5\mathrm{i}}{6-\mathrm{i}}$. Dann ist

$$z = \frac{(2+5\mathrm{i})\overline{(6-\mathrm{i})}}{(6-\mathrm{i})\overline{(6-\mathrm{i})}} = \frac{(2+5\mathrm{i})(6+\mathrm{i})}{|6-\mathrm{i}|^2} = \frac{1}{37}(7+32\mathrm{i}),$$

also $\operatorname{Re} z = \frac{7}{37}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{32}{37}$. Ferner ist

$$|z| = \frac{|2+5\mathrm{i}|}{|6-\mathrm{i}|} = \sqrt{\frac{4+25}{36+1}} = \sqrt{\frac{29}{37}}.$$

Bemerkung 5.12. Der Körper $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet, denn in jedem angeordneten Körper K ist $x^2 + y^2 > 0$ für $x, y \in K \setminus \{0\}$, während in $\mathbb{C}$ z.B. $1^2 + \mathrm{i}^2 = 0$ gilt. Das Symbol „$<$“ macht also nur für reelle Zahlen Sinn. Der Betrag $|\cdot|$ gibt aber eine Möglichkeit, den *Abstand* $|z-w| = |w-z|$ zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{C}$ zu messen. Die Dreiecksungleichung Satz 5.9(g) lässt sich wie folgt dann auch für Abstände formulieren:

$$|z - w| = |z - x + x - w| \leq |z - x| + |x - w| \qquad \text{für } z, x, w \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Definition 5.13. (a) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls $R > 0$ existiert mit $|z| \leq R$ für alle $z \in M$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$U_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\} \qquad (\textit{offene } \varepsilon\textit{-Umgebung von } z)$$
$$B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq \varepsilon\} \qquad (\textit{abgeschlossene } \varepsilon\textit{-Umgebung von } z)$$

Satz 5.14. *Sind $z, w \in \mathbb{C}, z \neq w$, so ist $U_\varepsilon(z) \cap U_\varepsilon(w) = \varnothing$ für $\varepsilon \in (0, \frac{|z-w|}{2}]$.*

Beweis. Sei $\varepsilon \in (0, \frac{|z-w|}{2}]$. Ist $x \in U_\varepsilon(z)$, so ist $|x - z| < \varepsilon$, also gemäß (5.1):

$$|x - w| \geq |z - w| - |z - x| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Es folgt: $x \notin U_\varepsilon(w)$. □

6. Folgen und Konvergenz

Definition 6.1. Sei M eine nichtleere Menge. Eine *Folge in M* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow M, n \longmapsto z_n \in M$. Man schreibt hierfür $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(z_1, z_2, z_3, \dots)$ oder kurz $(z_n)_n$.

Bemerkung 6.2. Manchmal betrachtet man allgemeiner $n_0 \in \mathbb{Z}$ und Abbildungen $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \longrightarrow M,\ n \longmapsto z_n$. Diese nennt man auch *Folgen in M.* Schreibweise hierfür: $(z_n)_{n\geq n_0}$ bzw. $(z_{n_0}, z_{n_0+1}, z_{n_0+2}, \dots)$.

Beispiel 6.3. (a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ ist eine Folge in $\mathbb{Q}$ (also auch in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$).

(b) Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, z, z^2, z^3, \dots)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Spezialfälle:

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, \dots),$$
$$(\mathrm{i}^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, \dots),$$
$$\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4} \dots).$$

(c) Sei $z_1 := 1, z_2 := 1$ und $z_n := z_{n-2} + z_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ heißt Folge der *Fibionacci-Zahlen.* Diese Folge lässt sich in geschlossener Form darstellen durch

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Definition 6.4. (a) Eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt *konvergent*, falls $z \in \mathbb{C}$ existiert mit folgender Eigenschaft:

(6.1) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass
$|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq N$, also $z_n \in U_\varepsilon(z)$ für $n \geq N$, siehe Abb. 6.1.

Man sagt dann auch „$(z_n)_n$ *konvergiert*" oder genauer „$(z_n)_n$ *konvergiert gegen* z". Kurzschreibweisen: $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Die Zahl z heißt *Grenzwert* der Folge $(z_n)_n$. Man beachte: Der Grenzwert ist durch (6.1) eindeutig bestimmt, denn: Sei (6.1) für $z, z' \in \mathbb{C}$ erfüllt. Wäre $z \neq z'$, so gäbe es nach Satz 5.14 ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z) \cap U_\varepsilon(z') = \varnothing$. Wegen (6.1) existieren dann Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$z_n \in U_\varepsilon(z) \quad \text{für } n \geq N_1 \qquad \text{und} \qquad z_n \in U_\varepsilon(z') \quad \text{für } n \geq N_2.$$

Also gilt für $N := \max\{N_1, N_2\}$: $z_N \in U_\varepsilon(z) \cap U_\varepsilon(z') = \varnothing$ ↯! Es folgt, dass $z = z'$.

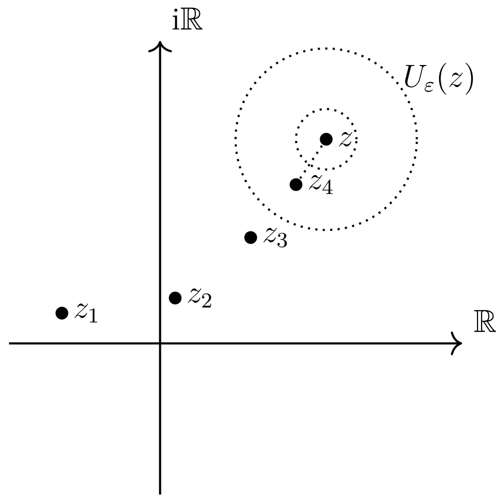

Abbildung 6.1.: Veranschaulichung von $z = \lim_{n\to\infty} z_n$

(b) Eine Folge in $\mathbb{C}$ heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

(c) Eine Folge in $\mathbb{C}$ heißt *Nullfolge*, wenn sie gegen 0 konvergiert.

Bemerkung 6.5. Offensichtlich gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ genau dann, wenn $(z_n - z)_n$ eine Nullfolge ist.

Beispiel 6.6. (a) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ konvergiert gegen 0.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar 3.14 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Also gilt für $n \geq N$: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. □

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. **Vorbemerkung:** Ist $|z| > 1$, so existiert zu jedem $R > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|z^n| = |z|^n > R$.

Beweis. Sei $R > 0$. Nach Satz 3.13 existiert $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ mit $n > \frac{R}{|z|-1}$, also $|z|^n = (1 + |z| - 1)^n \overset{\text{Satz 3.20}}{\geq} 1 + n(|z| - 1) > R$. □

Behauptung: Ist $|z| < 1$, so gilt $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

Beweis. O.E. sei $z \neq 0$, denn die Behauptung ist klar für $z = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > 1$, existiert nach der Vorbemerkung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{|z|^N} = \left|\frac{1}{z}\right|^N > \frac{1}{\varepsilon}$. Also gilt für $n \geq N$: $|z^n - 0| = |z|^n \leq |z|^N < \varepsilon$. □

(c) Wir zeigen, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$: Sei dazu $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Wegen Bemerkung 6.5 reicht es zu zeigen, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Man beachte, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit dem Binomischen Lehrsatz (Satz 3.26) erhalten wir

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

also

$$|a_n| = a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt dann $|a_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq 1 + (2/\varepsilon^2)$, d.h. (a_n) ist eine Nullfolge.

Definition 6.7. Eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{C}$ beschränkt ist, d.h. falls $R > 0$ existiert mit $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.8. *Jede konvergente Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $z := \lim_{n\to\infty} z_n$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < 1$ für $n \geq N$, also

$$|z_n| \leq |z_n - z| + |z| < 1 + |z| \qquad \text{für } n \geq N.$$

Setze $R := \max\{|z_1|, \ldots, |z_{N-1}|, 1 + |z|\}$. Dann ist $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung 6.9. Ist $z \in \mathbb{C}, |z| > 1$, so ist die Folge $(z^n)_n$ nach Beispiel 6.6(b) nicht beschränkt, also divergent nach Satz 6.8.

Satz 6.10. *Seien $(z_n)_n, (w_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z = \lim_{n\to\infty} z_n, w = \lim_{n\to\infty} w_n$. Dann gilt:*

(a) *$(z_n + w_n)_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$.*

(b) *$(z_n \cdot w_n)_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$.*

(c) *Ist $w \neq 0$, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $w_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und die Folge $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $\frac{z}{w}$.*

(d) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda z_n = \lambda z$.*

Beweis. **(a):** Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq N_1, \qquad |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq N_2.$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt also

$$|z_n + w_n - (z + w)| \leq \underbrace{|z_n - z|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|w_n - w|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

(b): Nach Satz 6.8 existiert $R > 0$ mit $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $R' := \max\{R, |w|\}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2R'} \quad \text{für } n \geq N_1, \qquad |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2R'} \quad \text{für } n \geq N_2.$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt also

$$\begin{aligned} |z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + (z_n - z)w| &\leq |z_n||w_n - w| + |z_n - z||w| \\ &< \frac{|z_n|\varepsilon}{2R'} + \frac{\varepsilon|w|}{2R'} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(c): Da $|w| > 0$, existiert nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|w_n - w| < \frac{|w|}{2}$ für $n \geq n_0$, also

$$|w_n| = |w - (w - w_n)| \geq |w| - |w - w_n| > \frac{|w|}{2} \qquad \text{für } n \geq n_0. \tag{6.2}$$

Insbesondere ist $w_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|w_n - w| < \frac{|w|^2\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_1$, also

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w_n w}(w - w_n)\right| = \frac{1}{|w_n||w|}|w_n - w| < \frac{|w|^2\varepsilon}{2|w_n||w|} \overset{(6.2)}{<} \varepsilon \qquad \text{für } n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Somit konvergiert die Folge $(\frac{1}{w_n})_{n \geq n_0}$ gegen $\frac{1}{w}$. Mit (b) folgt dann: $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$ für $n \to \infty$, $n \geq n_0$.

(d): Dies folgt direkt aus (b) durch Betrachtung der speziellen Folge $(w_n)_n$ mit $w_n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 6.11. Sei $(z_n)_n$ gegeben durch $z_n = \frac{6+n^2}{3n^2 - n\mathrm{i}} \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit Satz 6.10 und Beispiel 6.6(a):

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n^2} + 1}{3 - \frac{\mathrm{i}}{n}} = \frac{6\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 + 1}{3 - \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Korollar 6.12. *Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \bar{z}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ *und* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$

Beweis. Da $|\overline{z_n} - \bar{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

„(i) und (ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Mit Satz 6.10 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n + \overline{z_n}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z.$$

Die Aussage für den Imaginärteil folgt genauso.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} z_n + \mathrm{i} \operatorname{Im} z_n) = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z = z.$$

$\square$

Bemerkung 6.13. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) Existiert $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, so folgt $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

(b) $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

(c) Ist $(z_n)_n$ beschränkt und $(w_n)_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$, so ist auch $(z_n w_n)_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$.

Beweis. Übung. □

Definition 6.14. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in einer Menge M. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so nennt man die Folge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge $(z_n)_n$.

Bemerkung 6.15. Induktiv folgt aus $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ dass $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: Für $k = 1$ ist wegen $n_1 \in \mathbb{N}$ nämlich $n_1 \geq 1$. Und aus $n_k \geq k$ folgt $n_{k+1} > n_k \geq k$, Da n_{k+1} und k natürliche Zahlen sind, muss also $n_{k+1} \geq k+1$ gelten.

Bitte beachten Sie den Nachtrag Bemerkung 6.5 und Beispiel 6.6(c).

Beispiel 6.16. (a) Sei $z_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Folgen

$$(1, 1, \dots) = ((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad (-1, -1, \dots) = ((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$$

Teilfolgen von $(z_n)_n$. Diese erhält man durch Wahl von $n_k = 2k$ bzw. $n_k = 2k-1$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Betrachte $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Mit $n_k = k^2, k \in \mathbb{N}$ erhält man die Teilfolge

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots).$$

Definition 6.17. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(z_n)_n$, falls $(z_n)_n$ eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ besitzt mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$.

Satz 6.18. *Ist $(z_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$, so konvergiert jede Teilfolge von $(z_n)_n$ ebenfalls gegen $z := \lim_{n\to\infty} z_n$. Die Folge $(z_n)_n$ hat also nur z als Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $(z_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(z_n)_n$, und sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Da $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $|z_{n_k} - z| < \varepsilon$ für $k \geq N$. Es folgt: $z_{n_k} \to z$ für $k \to \infty$. □

Beispiel 6.19. Sei $z_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, und sei H die Menge der Häufungspunkte der Folge $(z_n)_n$. **Behauptung:** $H = \{1, -1\}$.

Beweis. „$\supseteq$": Da $z_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$ für $k \to \infty$, ist $1 \in H$. Da ferner $z_{2k-1} = (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1$ für $k \to \infty$, ist $-1 \in H$.

„$\subseteq$": Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{|z-1|, |z+1|\} > 0$. Sei ferner $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Angenommen, es gäbe eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. Dann existiert

$\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $z_{n_k} \in U_\varepsilon(z)$ für $k \geq \tilde{N}$. Sei nun $k_0 := \max\big\{N, \tilde{N}\big\}$. Beachte: $n_{k_0} \geq k_0$, also insbesondere $\frac{1}{n_{k_0}} \leq \frac{1}{k_0} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

1.Fall: n_{k_0} ist gerade. Dann ist $z_{n_{k_0}} = 1 + \frac{1}{n_{k_0}} \in U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(z) \overset{\text{Satz 5.14}}{=} \varnothing$ ↯!

2.Fall: n_{k_0} ist ungerade. Dann ist $z_{n_{k_0}} = -1 + \frac{1}{n_{k_0}} \in U_\varepsilon(-1) \cap U_\varepsilon(z) \overset{\text{Satz 5.14}}{=} \varnothing$ ↯! Es folgt: z ist kein Häufungspunkt von $(z_n)_n$. Also gilt $H \subseteq \{1, -1\}$. □

Bemerkung 6.20. Aus Satz 6.18 folgt, dass jede Folge in $\mathbb{C}$, welche mehr als einem Häufungspunkt besitzt, divergiert. Insbesondere ist die Folge $\big((-1)^n + \frac{1}{n}\big)_n$ aus Beispiel Beispiel 6.19 divergent.

Satz 6.21. *Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt: z ist Häufungspunkt von $(z_n)_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $|z_n - z| < \varepsilon$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei z ein Häufungspunkt von $(z_n)_n$. Dann existiert eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. Sei nun $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $|z_{n_k} - z| < \varepsilon$ für $k \geq \tilde{N}$. Insbesondere gilt dies für $k = \max\big\{\tilde{N}, N\big\} \geq N$.

„$\Leftarrow$“: Wir definieren $n_k \in \mathbb{N}$ für $k \in \mathbb{N}$ induktiv:

(i) $n_1 := 1$.

(ii) Sind $n_1, \ldots, n_k$ bereits definiert für ein $k \in \mathbb{N}$, so betrachten wir $M_k := \big\{n \in \mathbb{N} \,\big|\, n \geq n_k + 1,\ |z_n -$ Dann gilt nach Voraussetzung $M_k \neq \varnothing$. Also existiert $n_{k+1} := \min M_k$ nach Satz 3.12.

Nach Konstruktion ist $(z_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(z_n)_n$ und es gilt $|z_{n_k} - z| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, also $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. Es folgt: z ist Häufungspunkt von $(z_n)_n$. □

Bemerkung 6.22. In den folgenden Sätzen betrachten wir speziell Folgen in $\mathbb{R}$. Dort können wir –*anders als in* $\mathbb{C}$ – auch die Anordnung verwenden, um Konvergenzaussagen herzuleiten. Zunächst erhalten wir direkt aus Korollar 6.12 folgenden wenig überraschenden Sachverhalt: *Ist $(z_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, so ist auch* $\lim_{n\to\infty} z_n \in \mathbb{R}$.

Satz 6.23. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:*

(a) $a \leq b$.

(b) *Ist $a = b$ und $(c_n)_n$ eine weitere Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $(c_n)_n$ ebenfalls gegen a* (Einschließungskriterium).

Beweis. **(a):** Angenommen, $a > b$. Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2} \quad \text{für } n \geq N_1, \qquad |b_n - b| < \frac{a-b}{2} \quad \text{für } n \geq N_2.$$

Für $N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann:

$$b_N < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \left(\frac{a-b}{2}\right) < a_N$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b): Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_1, \qquad |b_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_2.$$

Somit ist

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \qquad \text{für } n \geq N := \max\{N_1, N_2\},$$

also $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$ für $n \geq N$, d.h. $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 6.24. (a) Wir zeigen: Für $x > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. Sei dazu zunächst $x \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x$ folgt dann

$$1 \leq x \leq n$$

und somit

$$1 \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Wegen Beispiel 6.6(c) liefert das Einschließungskriterium die Behauptung. Falls $x < 1$, so können wir mit dem ersten Fall wegen $1/x > 1$ wie folgt rechnen:

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(b) Wir betrachten die Folge $(\sqrt[n]{n^2+1})_n$. Es ist

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+1} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen Beispiel 6.6(c) und (a) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Das Einschließungskriterium liefert nun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$.

Definition 6.25. Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ heißt

$$\textit{monoton} \begin{cases} \textit{wachsend}, & \text{falls } a_{n+1} \geq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}; \\ \textit{fallend}, & \text{falls } a_{n+1} \leq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Satz 6.26. *Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_n$ monoton wachsend oder fallend, so ist $(a_n)_n$ konvergent.*

Beweis. Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt, also liefert das Vollständigkeitsaxiom (V) und Satz 2.17 die Existenz von $s = \sup A, t = \inf A$.

1.Fall: $(a_n)_n$ monoton wachsend. Sei $\varepsilon > 0$. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von A ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \varepsilon$. Somit ist

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \text{für } n \geq N, \qquad \text{also} \qquad |a_n - s| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

2.Fall: $(a_n)_n$ monoton fallend. Dann folgt genauso: $\lim_{n\to\infty} a_n = t$. $\square$

Definition 6.27. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) $(a_n)_n$ heißt

$$\begin{cases} \textit{nach oben beschränkt}, & \text{falls } \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \textit{nach unten beschränkt}, & \text{falls } \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \text{ nach unten beschränkt ist.} \end{cases}$$

(b) Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_n$. Wir definieren

(i) den *Limes superior*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} \sup H, & \text{falls } (a_n)_n \text{ nach oben beschränkt ist} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) den *Limes inferior*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} \inf H, & \text{falls } (a_n)_n \text{ nach unten beschränkt ist} \\ -\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier sei im Fall $H = \varnothing$ wie üblich $\inf H = \infty$ und $\sup H = -\infty$ gesetzt.

Beispiel 6.28. Es ist

$$\limsup_{n\to\infty}\Big((-1)^n + \frac{1}{n}\Big) = 1 \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty}\Big((-1)^n + \frac{1}{n}\Big) = -1,$$

da die Folge $\big((-1)^n + \frac{1}{n}\big)_n$ beschränkt ist und gemäß Beispiel 6.19 genau die Häufungspunkte 1 und -1 hat.

Satz 6.29. *Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_n$. Sei ferner $s_n := \sup\{a_m \mid m \geq n\}$ und $t_n := \inf\{a_m \mid m \geq n\}$. Dann ist*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} t_n \qquad \in H.$$

Insbesondere ist $H \neq \varnothing$.

Beweis. Offensichtlich gilt:

$$t_n \leq a_n \leq s_n \quad \text{und} \quad t_n \leq t_{n+1} \leq s_{n+1} \leq s_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit sind die Folgen $(s_n)_n$ und $(t_n)_n$ monoton und beschränkt, also konvergent nach Satz 6.26. Sei $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ und $t := \lim_{n\to\infty} t_n$.

Wir zeigen nun mit Hilfe von Satz 6.21: s und t sind Häufungspunkte von $(a_n)_n$. Sei dazu $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ist, existiert $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ mit $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nach Definition von s_n existiert ferner $m \geq n$ mit $s_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_m \leq s_n$, also $|a_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt: $m \geq N$ und $|a_m - s| \leq |a_m - s_n| + |s_n - s| < \varepsilon$. Also ist s ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Der Beweis für t ist analog zu führen. Sei nun $(a_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$. Da

$$\underset{\substack{\downarrow\\ t}}{t_{n_k}} \leq a_{n_k} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ s}}{s_{n_k}} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

folgt $t \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq s$ mit Satz 6.23(a). Somit folgt $H \subseteq [t, s]$. Aus dem bisher Bewiesenen folgt nun

$$s = \max H = \limsup_{n\to\infty} a_n \in H \qquad \text{und} \qquad t = \min H = \liminf_{n\to\infty} a_n \in H$$

und somit die Behauptung. □

Korollar 6.30. *Sei $(a_n)_n$ ein beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, so konvergiert $(a_n)_n$ gegen diesen gemeinsamen Wert.*

Beweis. Sei $a := \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, und seien s_n und t_n für $n \in \mathbb{N}$ wie in Satz 6.29 definiert. Dann gilt $t_n \leq a_n \leq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = a = \lim_{n\to\infty} s_n$. Also folgt mit Satz 6.23(b): $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Satz 6.31. *von Bolzano-Weierstraß Sei $(z_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann hat $(z_n)_n$ einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $a_n := \operatorname{Re} z_n$ und $b_n := \operatorname{Im} z_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(a_n)_n, (b_n)_n$ **beschränkte** Folgen in $\mathbb{R}$. Nach Satz 6.29 hat $(a_n)_n$ einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Weiterhin hat die Folge $(b_{n_k})_k$ nach Satz 6.29 einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_j}})_j$ mit $b := \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}}$. Mit Satz 6.10 und Satz 6.18 folgt

$$z_{n_{k_j}} = a_{n_{k_j}} + \mathrm{i} b_{n_{k_j}} \longrightarrow a + \mathrm{i}b \qquad \text{für } j \longrightarrow \infty.$$

Also hat $(z_n)_n$ die konvergente Teilfolge $(z_{n_{k_j}})_j$. □

Definition 6.32. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty, & \text{falls zu jedem } R \in \mathbb{R} \text{ ein } N \in \mathbb{N} \text{ existiert mit } a_n \geq R \text{ für } n \geq N \\ -\infty, & \text{falls zu jedem } R \in \mathbb{R} \text{ ein } N \in \mathbb{N} \text{ existiert mit } a_n \leq R \text{ für } n \geq N \end{cases}$$

In diesen Fällen nennt man die Folge *bestimmt divergent*.

Beispiel 6.33. (a) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Dies lässt sich mit Hilfe der Vorbemerkung in Beispiel 6.6(b) folgern.

(c) Ist $a \in \mathbb{R}, a \leq -1$, so ist $(a^n)_n$ divergent, aber nicht bestimmt divergent.

Bemerkung 6.34. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_n$.

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n)_n \text{ nach unten beschränkt und } H = \varnothing$$
$$\Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Analog: $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

(b) Mit Definition 6.32 lässt sich Satz 6.29 wie folgt verallgemeinern:

Ist $(a_n)_n$ nach oben beschränkt, so ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\}$;

Ist $(a_n)_n$ nach unten beschränkt, so ist $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_m \mid m \geq n\}$;

Bemerkung 6.35. (a) Seien Aussagen $A(n)$ gegeben für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt „A(n) gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$“, wenn $A(n)$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$, so hat die Änderung endlich vieler Folgenglieder keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten. Daher gilt Satz 6.23 auch, wenn die Voraussetzungen nur für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Ebenso reicht es, in Satz 6.26 vorauszusetzen, dass die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton (und beschränkt) ist.

Definition 6.36. Eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|z_n - z_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$.

Satz 6.37. *Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$(z_n)_n \textit{ Cauchyfolge} \qquad \Leftrightarrow \qquad (z_n)_n \textit{ konvergent.}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei $z := \lim_{n\to\infty} z_n$, und sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$, also $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Somit ist $(z_n)_n$ eine Cauchyfolge.

„$\Rightarrow$“: Sei $(z_n)_n$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(z_n)_n$ beschränkt, denn: Nach Definition existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_m| < 1$ für $n, m \geq N$, also insbesondere

$$|z_n| \leq |z_n - z_N| + |z_N| < 1 + |z_N| \qquad \text{für } n \geq N.$$

Setzt man $R := \max\{|z_1|, \ldots, |z_{N-1}|, 1 + |z_N|\}$, so ist $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.31 besitzt nun $(z_n)_n$ einen Häufungspunkt $z \in \mathbb{C}$. **Wir zeigen:** $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq \tilde{N}$. Nach Satz 6.21 existiert $n_0 \geq \tilde{N}$ mit $|z_{n_0} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit folgt für $n \geq \tilde{N}$:

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{n_0}| + |z_{n_0} - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkung 6.38. (a) Die Cauchyeigenschaft Definition 6.36 ist ein Kriterium für die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{C}$, bei dem man den Grenzwert nicht mitgeliefert bekommt. Es wird sich insbesondere im folgenden Kapitel bei der Untersuchung der Konvergenz von Reihen als nützlich erweisen.

(b) Wir haben im Beweis von Satz 6.37„⇒" implizit das Vollständigkeitsaxiom (V) für reelle Zahlen verwendet. Tatsächlich kann man die Vollständigkeit der reellen Zahlen nicht nur durch (V), sondern alternativ durch folgende Eigenschaften charakterisieren:

(AA) Zu je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}^+$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$ (*Archimedisches Axiom*).

(CF) Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Wenn man also die Körperaxiome (K1)–(K5) und die Anordnungsaxiome (A1), (A2) voraussetzt, so kann man zeigen, dass (V) äquivalent zu (AA) und (CF) ist.

7. Reihen

Definition 7.1. Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) und $s_n := \sum_{k=1}^n z_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Reihe* in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) mit Summanden z_k. Sie wird mit $\sum_{k=1}^\infty z_k$ oder kurz mit $\sum_k z_k$ bezeichnet.

(b) s_n heißt *n-te Partialsumme* der Reihe $\sum_k z_k$.

(c) Konvergiert $(s_n)_n$, so nennt man die Reihe $\sum_k z_k$ *konvergent*, andernfalls *divergent*. Den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n z_k \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) nennt man *Summe* der Reihe und bezeichnet ihn ebenfalls mit $\sum_{k=1}^\infty z_k$ (Vorsicht: Doppelbezeichnung!).

Beispiel 7.2 (Teleskopreihe)**.** Sei $z_k = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Folglich ist die Reihe $\sum_k \frac{1}{k(k+1)}$ konvergent mit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$.

Bemerkung 7.3. Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$ und sind $z_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq n_0$ gegeben, so bezeichnet man die Folge $(s_n)_{n\geq n_0}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=n_0}^n z_k$ ebenfalls als Reihe und schreibt hierfür $\sum_{k=n_0}^\infty z_k$. Dabei gilt für jedes $m_0 \in \mathbb{Z}$, $m_0 > n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^\infty z_k \text{ konvergiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=m_0}^\infty z_k \text{ konvergiert.}$$

Im Fall der Konvergenz gilt ferner für die Summen:

$$\sum_{k=n_0}^\infty z_k = \sum_{k=n_0}^{m_0-1} z_k + \sum_{k=m_0}^\infty z_k$$

Satz 7.4. *Ist $\sum_{k=1}^\infty z_k$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{C}$, so muss $(z_k)_k$ eine Nullfolge sein.*

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n z_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung existiert $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. □

Satz 7.5. *Sind $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ genau dann, wenn $M > 0$ existiert mit $\sum_{k=1}^n a_k \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* In diesem Spezialfall (und nur dann!) schreibt man auch $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$.

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist die Folge $(s_n)_n$ monoton wachsend, also gilt:

$$\sum_k a_k \text{ konvergent} \quad \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad (s_n)_n \text{ konvergent} \quad \overset{\text{Satz 6.8 und Satz 6.26}}{\Longleftrightarrow} \quad (s_n)_n \text{ beschränkt.}$$

Die Behauptung folgt. □

Beispiel 7.6. (a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^\infty z^k$ heißt *geometrische Reihe.* **Vorbemerkung:** Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $(1-z)\sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1}$, also

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{für } z \neq 1; \\ n+1 & \text{für } z = 1. \end{cases}$$

Nun zur Konvergenz der geometrischen Reihe: **1. Fall:** $|z| \geq 1$. Dann ist $(z^k)_k$ keine Nullfolge, also divergiert die Reihe $\sum_k z^k$ nach Satz 7.4. **2. Fall:** $|z| < 1$. Dann folgt $z^n \to 0$ für $n \to \infty$, also $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$. In diesem Fall konvergiert die Reihe also, und es gilt $\sum_{k=0}^\infty z^k = \frac{1}{1-z}$.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ heißt *harmonische Reihe.* Um ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen, fassen wir ihre Glieder in Gruppen der Größe von Zweierpotenzen zusammen. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=2^{\ell-1}}^{2^\ell-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=2^{\ell-1}}^{2^\ell-1} \frac{1}{2^\ell} = \sum_{\ell=1}^n \frac{2^{\ell-1}}{2^\ell} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Da $\frac{n}{2} \to \infty$ für $n \to \infty$, divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ nach Satz 7.5. Dies gilt, obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)_k$ eine Nullfolge ist. Die Umkehrung von Satz Satz 7.4 gilt also nicht!

Satz 7.7. *Seien $\sum_{k=1}^\infty z_k, \sum_{k=1}^\infty w_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_k \lambda z_k$ und $\sum_k (z_k + w_k)$ konvergent mit*

$$\sum_{k=1}^\infty (z_k + w_k) = \sum_{k=1}^\infty z_k + \sum_{k=1}^\infty w_k \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=1}^\infty \lambda z_k = \lambda \sum_{k=1}^\infty z_k.$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 6.10, da für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (z_k + w_k) = \sum_{k=1}^n z_k + \sum_{k=1}^n w_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^n \lambda z_k = \lambda \sum_{k=1}^n z_k.$$

□

Satz 7.8. *Sei $\sum_{k=1}^\infty z_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:* (i) $\sum_k z_k$ *konvergiert* (ii) $\sum_k \overline{z_k}$ *konvergiert* (iii) $\sum_k \operatorname{Re} z_k$ *und* $\sum_k \operatorname{Im} z_k$ *konvergieren.*
Im Falle der Konvergenz gilt dabei:

$$\sum_{k=1}^\infty z_k = \sum_{k=1}^\infty \operatorname{Re} z_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im} z_k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^\infty \overline{z_k} = \overline{\sum_{k=1}^\infty z_k}$$

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n z_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\operatorname{Re} s_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_k, \quad \operatorname{Im} s_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} z_k \quad \text{und} \quad \overline{s_n} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Korollar 6.12 sind für $s \in \mathbb{C}$ äquivalent: (i) $s_n \to s$ für $n \to \infty$, (ii) $\overline{s_n} \to \overline{s}$ für $n \to \infty$, (iii) $\operatorname{Re} s_n \to \operatorname{Re} s$ und $\operatorname{Im} s_n \to \operatorname{Im} s$ für $n \to \infty$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 7.9 (Cauchykriterium)**.** *Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty z_k$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:*

$$\textit{Für alle } \varepsilon > 0 \textit{ existiert ein } N \in \mathbb{N} \textit{ mit } \left|\sum_{k=n}^m z_k\right| < \varepsilon \textit{ für } m \geq n \geq N.$$

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n z_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann:
$\sum_k z_k$ konvergent $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)_n$ konvergent $\overset{\text{Satz 6.37}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)_n$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ mit $\varepsilon > |s_m - s_{n-1}| = \left|\sum_{k=n}^m z_k\right|$ für $m \geq n \geq N$. □

Bemerkung 7.10. An Satz 7.9 sieht man direkt, dass die Änderung von endlich vielen Summanden keinen Einfluss auf die Konvergenz einer Reihe hat (aber natürlich auf die Summe!).

Satz 7.11. *Sei $\sum_{k=1}^\infty z_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $\sum_{k=1}^\infty a_k$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Ferner möge $N \in \mathbb{N}$ existieren mit*

$$|z_k| \leq a_k \qquad \textit{für } k \geq N$$

(Man sagt, die Reihe $\sum_{k=N}^\infty a_k$ ist eine *Majorante* der Reihe $\sum_{k=N}^\infty z_k$). *Dann gilt:*

(a) *Ist $\sum_k a_k$ konvergent, so auch $\sum_k z_k$, und es gilt*

$$\left|\sum_{k=n}^\infty z_k\right| \leq \sum_{k=n}^\infty a_k \qquad \textit{für } n \geq N. \qquad \text{(Majorantenkriterium)}$$

(b) *Ist $\sum_k z_k$ divergent, so ist auch $\sum_k a_k$ divergent* (Minorantenkriterium)*.*

Beweis. **(a):** Für $m \geq n \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^m z_k\right| \underset{\text{ungleichung}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{\leq}} \sum_{k=n}^m |z_k| \leq \sum_{k=n}^m a_k. \tag{7.1}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung und Satz 7.9 existiert $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N} \geq N$ und

$$\sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon \quad \text{für } m \geq n \geq \tilde{N}, \qquad \text{also auch} \quad \left|\sum_{k=n}^m z_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für } m \geq n \geq \tilde{N}.$$

Mit Satz 7.9 folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_k z_k$. Ferner gilt für $n \geq N$:

$$\left|\sum_{k=n}^\infty z_k\right| = \left|\lim_{m \to \infty} \sum_{k=n}^m z_k\right| \overset{\text{Bemerkung 6.13}}{=} \lim_{m \to \infty} \left|\sum_{k=n}^m z_k\right| \overset{(7.1)}{\leq} \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n}^m a_k = \sum_{k=n}^\infty a_k$$

(b): folgt aus (a). □

Beispiel 7.12. (a) Wir zeigen: Die Reihe $\sum_n a_n$ mit $a_n := \left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$ konvergiert. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}$ existiert nämlich $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt:

$$\left|\frac{2n}{3n-1}\right| \leq \frac{3}{4}.$$

Es folgt für $n \geq N$:

$$\left|\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n\right| = \left|\frac{2n}{3n-1}\right|^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

womit wir eine eine geometrische Reihe als konvergente Majorante gefunden haben.

(b) Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s \leq -2$. Dann gilt

$$0 \leq k^s \leq k^{-2} \leq \frac{2}{k(k+1)} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Ferner konvergiert die Reihe $\sum_k \frac{2}{k(k+1)}$ nach Beispiel 7.2 und Satz 7.7. Mit Satz 7.11(a) folgt, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^s$ konvergiert.

(c) Sei $s \in \mathbb{Q}, s \geq -1$. Dann gilt $0 \leq \frac{1}{k} \leq k^s$ für $k \in \mathbb{N}$. Ferner divergiert die Reihe $\sum_k \frac{1}{k}$ nach Beispiel 7.6(b). Mit Satz 7.11(b) folgt, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^s$ divergiert.

Definition 7.13. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{C}$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_k |z_k|$ konvergiert.

Satz 7.14. *Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, und es gilt $\left|\sum_{k=n}^{\infty} z_k\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |z_k|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 7.11 mit $N = 1$ und $a_k := |z_k|$ für $k \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 7.15. Das Majorantenkriterium Satz 7.11(a) liefert im Fall der Anwendbarkeit auf eine Reihe $\sum_k z_k$ in $\mathbb{C}$ stets deren **absolute** Konvergenz, denn mit der Reihe $\sum_k z_k$ erfüllt auch die Reihe $\sum_k |z_k|$ die Voraussetzungen dieses Satzes.

Satz 7.16. *Sei $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ konvergent, und es gilt die* Restgliedabschätzung

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \frac{2a_n}{|z-1|} \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}.$$

Im Spezialfall $z = -1$ erhält man das sogenannte Leibnizkriterium*: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ ist konvergent, und es gilt*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}(z-1)\sum_{k=n}^{m} a_k z^k &= \sum_{k=n+1}^{m+1} a_{k-1}z^k - \sum_{k=n}^{m} a_k z^k \\ &= -\underbrace{a_n}_{\geq 0} z^n + \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{(a_{k-1}-a_k)}_{\geq 0} z^k + \underbrace{a_m}_{\geq 0} z^{m+1},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}|z-1|\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| &\leq a_n|z|^n + \sum_{k=n+1}^{m}(a_{k-1}-a_k)|z|^k + a_m|z|^{m+1} \\ &\leq a_n + \sum_{k=n+1}^{m}(a_{k-1}-a_k) + a_m = 2a_n\end{aligned}$$

und somit

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \leq \frac{2a_n}{|z-1|}. \tag{7.2}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \frac{|z-1|}{2}\varepsilon$ für $n \geq N$. Also gilt mit (7.2): $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon$ für $m \geq n \geq N$. Das Cauchykriterium Satz 7.9 liefert nun die Konvergenz der Reihe $\sum_k a_k z^k$. Ferner gilt

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \overset{(7.2)}{\leq} \frac{2a_n}{|z-1|} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wie behauptet. $\square$

Beispiel 7.17. (a) Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ ist

- konvergent nach Satz 7.16.
- nicht absolut konvergent nach Beispiel 7.6(b).

(b) Sei $a_k = \frac{2^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_k)_k$ monoton fallend, denn $a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{2a_k}{k+1} \leq a_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Ferner ist $0 \leq a_k = \frac{\overbrace{2\cdot 2 \ldots 2}^{k-\text{mal}}}{1\cdot 2 \ldots k} \leq \frac{4}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$, also $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Folglich ist $(a_k)_k$ und damit auch $(a_{2k})_k$ eine monoton fallende Nullfolge. Das Leibnizkriterium liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{2k}$, wobei für die Summe s mit der Restgliedabschätzung aus Satz 7.16 gilt:

$$|s+1| = |s-(a_0-a_2)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k a_{2k}\right| \leq a_4 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Wir werden später bei der Einführung der *Kosinusfunktion* sehen, dass $s = \cos 2$ gilt. Es folgt $-\frac{5}{3} \leq s = \cos 2 \leq -\frac{1}{3}$, also insbesondere $\cos 2 < 0$. Dies werden wir später zur Definition der Zahl π verwenden.

Satz 7.18. *Eine Reihe* $\sum_k z_k$ *in* $\mathbb{C}$ *ist*

(a) *absolut konvergent, wenn*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} < 1$$

gilt, und sie ist und divergent, wenn

$$\sqrt[k]{|z_k|} \geq 1$$

für unendlich viele k *gilt* (Wurzelkriterium)*,*

(b) *absolut konvergent, wenn* $z_k \neq 0$ *für fast alle* k *und*

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| < 1$$

gelten, und sie ist divergent, wenn

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \geq 1$$

für fast alle k *gilt* (Quotientenkriterium).

Die Divergenzbedingung ist für (a) *zum Beispiel erfüllt, wenn* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|} > 1$ *gilt, und für* (b)*, wenn* $\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| > 1$ *gilt.*

Beweis. **(a):** Im ersten Fall existieren $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_k| \leq q^k$ für $k \geq N$ gilt, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert gemäß Beispiel 7.6(a). Das Majorantenkriterium liefert nun die Konvergenz der Reihe $\sum_k |z_k|$ und damit die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_k z_k$. Im zweiten Fall existiert eine Teilfolge $(z_{k_j})_j$ mit $|z_{k_j}| \geq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$, insbesondere ist $(z_k)_k$ keine Nullfolge. Folglich divergiert die Reihe $\sum_k z_k$.

(b): Im ersten Fall existieren $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leq q$ für $k \geq N$ gilt. Sei $c := q^{-N}|z_N|$. Für $k \geq N$ folgt dann (per Induktion):

$$|z_k| \leq q|z_{k-1}| \leq q^2|z_{k-2}| \leq \cdots \leq q^{k-N}|z_N| = cq^k.$$

Dabei konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} cq^k$ nach Beispiel 7.6(a) und Satz 7.7. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_k z_k$ folgt nun wie in (a) aus dem Majorantenkriterium. □

Beispiel 7.19. Sei $z_k := \frac{k^7}{3^k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\sqrt[k]{|z_k|} = \frac{(\sqrt[k]{k})^7}{3} \to \frac{1}{3}$ für $k \to \infty$, also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|z_k|} < \frac{1}{2}$ für $k \geq N$. Mit dem Wurzelkriterium folgt: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergiert absolut. Im zweiten Fall folgt auch, dass $(z_k)_k$ keine Nullfolge ist (Beweis zur Übung empfohlen). Somit divergiert die Reihe $\sum_k z_k$.

Bemerkung 7.20. Sei $(z_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Sei $s \in \mathbb{Z}$ und $z_k := k^s$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann hat man

$$\sqrt[k]{|z_k|} = (\sqrt[k]{k})^s \to 1^s = 1 \qquad \text{für } k \to \infty$$

und

$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \left(\frac{k+1}{k}\right)^s = \left(1+\frac{1}{k}\right)^s \to 1^s = 1 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

In diesem Fall liefert Satz 7.18 also keine Information über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty z_k$. Allerdings hatten wir diese Reihe bereits in Beispiel 7.12 mit Hilfe des Majorantenkriteriums untersucht.

Satz und Definition 7.21. (a) *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent, und wir setzen* $\exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$.

(b) *Die Abbildung* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z)$ *heißt* Exponentialfunktion.

(c) $\mathrm{e} := \exp(1)$ *heißt* Eulersche Zahl.

Beweis der Konvergenz in (a). Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2|z|$:

$$\left|\frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}}\right| = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Das Quotientenkriterium liefert nun die Konvergenz. □

Bemerkung 7.22. Da $2^k \leq k!$ für $k \geq 4$ gilt, ist

$$0 \leq \mathrm{e} - \frac{8}{3} = \sum_{k=4}^\infty \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8},$$

also $\mathrm{e} \in \left[\frac{8}{3}, \frac{8}{3}+\frac{1}{8}\right] \subseteq (\frac{5}{2}, 3)$.

Satz 7.23. *Für $x > 0$ konvergiert die Folge $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)_n$ monoton wachsend gegen $\exp(x)$. Insbesondere gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Beweis. Sei $x > 0$. Mit dem Binomialsatz folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\text{(7.3)} \quad a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\frac{n-\ell}{n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right)$$

und somit für $n \geq 2$

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x^k}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right) \geq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x^k}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(1-\frac{\ell}{n-1}\right)\right)$$
$$= \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1},$$

d.h. $(a_n)_n$ ist monoton wachsend. Für $b_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ folgt aus (7.3) wegen $1 - \frac{\ell}{n} \leq 1$ insbesondere $0 \leq a_n \leq b_n < \exp(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_n$ ist beschränkt. Wegen Satz 6.26 konvergiert $(a_n)_n$ also, und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \exp(x)$, gemäß Satz 6.23. Für beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$ folgt andererseits für $n \geq m$ aus (7.3)

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{x^k}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right)$$

und somit $\lim_{n\to\infty} a_n \geq b_m$. Dies liefert $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{m\to\infty} b_m = \exp(x)$. Wir haben also $\lim_{n\to\infty} a_n = \exp(x)$ gezeigt. □

Satz und Definition 7.24. *Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $M_p := \{0, \dots, p-1\}$. Wir nennen eine Folge $(a_k)_k$ in M_p* nicht zulässig, *wenn $a_k = p - 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, andernfalls* zulässig. *Es gilt:*

(a) *Ist $(a_k)_k$ eine Folge in M_p, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k p^{-k}$.*

(b) *Für jedes $x \in [0, 1)$ existiert genau eine zulässige Folge $(a_k)_k$ in M_p mit*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k}.$$

Beweis. **(a):** Wir haben $|a_k p^{-k}| \leq (p-1)\left(\frac{1}{p}\right)^k$, mit $0 \leq \frac{1}{p} < 1$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_k a_k p^{-k}$ nach dem Majorantenkriterium.

(b): 1. Existenz. Wir definieren a_n induktiv für $n \in \mathbb{N}$: $a_1 := [xp]$, und sind $a_1, \dots, a_n$ bereits definiert, so sei

$$r_n := x - \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := [r_n p^{n+1}].$$

Wir zeigen nun:

$$0 \leq r_n < p^{-n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Zunächst ist $r_1 = x - a_1 p^{-1} = p^{-1}(xp - [xp]) \in [0, p^{-1})$. Ferner ist

$$r_{n+1} = r_n - a_{n+1} p^{-(n+1)} = p^{-(n+1)}(r_n p^{n+1} - [r_n p^{n+1}]) \in [0, p^{-(n+1)}) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dies liefert (7.4). Aus (7.4) folgt $a_{n+1} = [r_n p^{n+1}] \leq r_n p^{n+1} < p$ und somit $a_{n+1} \in M_p$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (hier haben wir $r_0 := x$ gesetzt). Ferner liefert (7.4) $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, also $x = \sum_{k=1}^\infty a_k p^{-k}$. Angenommen, die Folge $(a_k)_k$ wäre nicht zulässig. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a_k = (p-1)$ für $k \geq n$, und es folgt

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k p^{-k} = (p-1)p^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} = \frac{(p-1)}{1 - \frac{1}{p}} p^{-n} = p^{-(n-1)}.$$

Da $x < 1$ nach Voraussetzung, folgt $n \geq 2$ und $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k p^{-k} = p^{-(n-1)}$, im Widerspruch zu (7.4). **2. Eindeutigkeit.** Angenommen, es gäbe $x \in [0, 1)$ und verschiedene zulässige Folgen $(a_k)_k, (b_k)_k$ in M_p mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^{-k}$. Sei dann $n \in \mathbb{N}$ minimal gewählt mit $a_n \neq b_n$, wobei ohne Einschränkung $a_n \geq b_n + 1$ gelte. Dann ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k p^{-k} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k p^{-k},$$

und wegen der Zulässigkeit von $(b_k)_k$ folgt die strikte Ungleichung

$$p^{-n} \leq (a_n - b_n)p^{-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (b_k - a_k)p^{-k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k p^{-k} < (p-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} p^{-k} = p^{-n}$$

und somit ein Widerspruch. Dies liefert die Eindeutigkeit. □

Beispiel 7.25. Sei $x = \frac{1}{2}$ und $p = 7$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_1 &:= [xp] = \left[\frac{7}{2}\right] = 3, \quad r_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}, \\ a_2 &= [r_1 p^2] = \left[\frac{49}{14}\right] = 3, \quad r_2 = r_1 - a_2 p^{-2} = \frac{1}{14} - \frac{3}{49} = \frac{1}{98}. \end{aligned}$$

Induktiv erhält man $a_k = 3$ und $r_k = \frac{1}{2} \cdot 7^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \frac{3}{343} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 7^{-k}.$$

Dies ist im Nachhinein klar, denn die Summenformel für die geometrische Reihe liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 7^{-k} = 3\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{7}} - 1\Big) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 7.26. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

(a) Die Darstellung $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k}$ mit $a_k \in M_p$ nennt man *Entwicklung von x als p-adischer Bruch* oder kurz *p-adische Entwicklung von x*. Spezialfälle: $p = 2$: *dyadischer Bruch*, $p = 10$: *Dezimalbruch*.

(b) Ähnlich wie in Satz und Definition 7.24(b) kann man zeigen, dass man jedes $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ darstellen kann als $x = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k p^{-k}$ mit $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in M_p$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq n_0$. Auch in diesem allgemeineren Fall spricht man von einer *p-adischen Entwicklung von x*.

(c) Eine Dezimalbruchentwicklung schreibt man oft als Kommazahl, z.B.

$$\pi = 3,14159... = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + \ldots$$

(d) Anschaulich gewinnt man die p-adische Entwicklung einer Zahl $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{-k} \in [0,1)$ durch Intervallschachtelung. Man teilt das Intervall dazu in p Teilintervalle $I_0 = [0, \frac{1}{p}), I_1 = \left[\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right), \dots, I_{p-1} = \left[\frac{p-1}{p}, 1\right)$. Ist $x \in I_j$, so ist $a_1 = j$ in der obigen Entwicklung, und man unterteilt das Intervall I_j in der gleichen Weise in p gleichgroße Intervalle, um a_2 zu bestimmen, usw.

Definition 7.27. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\tau(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_k z_k$.

Satz 7.28. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$. Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat auch die Summe $s := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \in \mathbb{C}$, und die Konvergenz ist ebenfalls absolut.*

Beweis. Sei $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, und sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aufgrund der Bijektivität von τ existiert ferner $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, $\tilde{N} \geq N$ mit $\{1, \dots, N\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(\tilde{N})\}$. Zum Beispiel können wir hier

$$\tilde{N} := \max\Big\{N,\ \max \tau^{-1}\big(\{1, 2, \dots, N\}\big)\Big\}$$

nehmen. Also folgt für $n \geq \tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} z_{\tau(k)} - s\right| &\leq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} z_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{N} z_k\right|}_{\substack{n-N \text{ Summanden} \\ \text{mit Index } \geq N+1}} + \left|\sum_{k=1}^{N} z_k - s\right| \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\tau(k)}$ mit Summe s. Durch Anwendung dieses Arguments auf $|z_k|$ anstelle von z_k folgt die absolute Konvergenz. □

Bemerkung 7.29. Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz in Satz 7.28 ist entscheidend, denn es gilt: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen, so existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ der Reihe, welche gegen c konvergiert. *(Riemannscher Umordnungssatz, Beweis z.B. in Heuser, Analysis I, S.198–199)*

Beispiel 7.30. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ ist konvergent (nach dem Leibnizkriterium), aber nicht absolut konvergent. Sie lässt sich wie folgt umordnen:

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
&+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} \\
&+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} \\
&+ \dots \\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} - \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{8} \text{ für } n \geq 3} \\
&+ \dots
\end{aligned}
$$

Es gibt also eine Teilfolge $(s_m)_m$ der Partialsummen der umgeordneten Reihe mit $s_m \geq m(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) = \frac{m}{8}$ für $m \in \mathbb{N}$. Somit divergiert diese umgeordnete Reihe.

8. Abzählbarkeit

Definition 8.1. Sei M eine Menge. M heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion (d.h. eine bijektive Abbildung) $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to M$ gibt. In diesem Fall nennt man die Folge $(\tau(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ — oder auch die Abbildung τ selbst — eine *Abzählung* von M. M heißt *höchstens abzählbar*, wenn M endlich oder abzählbar ist. Eine nicht endliche und nicht abzählbare Menge heißt *überabzählbar*.

Nachtrag (vgl. die Bemerkung unter Kapitel 1, Abschnitt 1.2(c)): Streng genommen muss man noch definieren, wann eine Menge M „endlich" sein soll. Dies kann z.B. wie folgt geschehen: M heißt endlich, wenn es eine beschränkte Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}_0$ und eine surjektive Abbildung $N \to M$ gibt.

Beispiel 8.2. (a) Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist $M := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ abzählbar. Eine Bijektion $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to M$ ist gegeben durch $\tau(n) = n + n_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Betrachte dazu die Abbildung

$$\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \qquad \tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

d.h. $(\tau(n))_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots)$. τ ist bijektiv mit

$$\tau^{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \qquad \tau^{-1}(k) = \begin{cases} 2k & \text{für } k \geq 0, \\ -1 - 2k, & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

(c) $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist abzählbar. Abzählungen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ veranschaulicht man am besten in Pfeildiagrammen wie z.B. in Abb. 8.1. Die zugehörige Abbildung ist gegeben durch

$$\gamma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad \gamma(n) = \Big(n - \frac{m(m-1)}{2}, \frac{m(m+1)}{2} - n - 1\Big),$$

mit $m := \max\Big\{i \in \mathbb{N} \;\Big|\; \frac{i(i-1)}{2} \leq n\Big\}$, d.h. falls $\frac{m(m-1)}{2} \leq n < \frac{m(m+1)}{2}$ gilt. Speziell erhält man z.B.:

$$\begin{array}{lllll} n = 0 & \Rightarrow & m = 1 & \Rightarrow & \gamma(0) = (0, 0). \\ n = 1 & \Rightarrow & m = 2 & \Rightarrow & \gamma(1) = (0, 1). \\ n = 2 & \Rightarrow & m = 2 & \Rightarrow & \gamma(2) = (1, 0). \\ n = 3 & \Rightarrow & m = 3 & \Rightarrow & \gamma(3) = (0, 2). \\ n = 4 & \Rightarrow & m = 3 & \Rightarrow & \gamma(4) = (1, 1). \\ n = 5 & \Rightarrow & m = 3 & \Rightarrow & \gamma(5) = (2, 0). \end{array}$$

u.s.w.

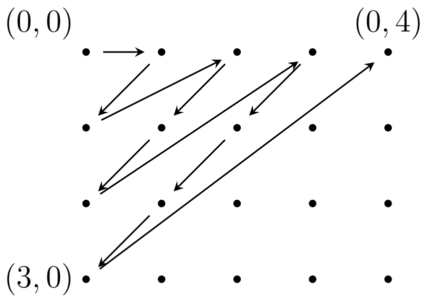

Abbildung 8.1.: „Diagonalabzählung“ von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

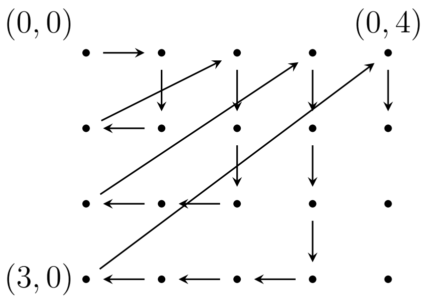

Abbildung 8.2.: „Rechteckabzählung“ von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Man rechnet nach, dass γ tatsächlich bijektiv ist mit

$$\gamma^{-1}\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad \gamma^{-1}(k,\ell) = \frac{(k+\ell)(k+\ell+1)}{2} + k.$$

Eine weitere Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ liefert das Diagramm in Abb. 8.2. Die zugehörige Abbildung ist gegeben durch

$$\sigma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad \sigma(n) = \begin{cases} (n-m^2, m), & \text{falls } m^2 \leq n < m^2+m+1; \\ (m, m^2+2m-n), & \text{falls } m^2+m+1 \leq n < (m+1)^2, \end{cases}$$

mit $m \coloneqq \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid i^2 \leq n\}$. Speziell erhält man hier:

$$\begin{array}{lllll} n=0 & \Rightarrow & m=0 & \Rightarrow & \sigma(0)=(0,0). \\ n=1 & \Rightarrow & m=1 & \Rightarrow & \sigma(1)=(0,1). \\ n=2 & \Rightarrow & m=1 & \Rightarrow & \sigma(2)=(1,1). \\ n=3 & \Rightarrow & m=1 & \Rightarrow & \sigma(3)=(1,0). \\ n=4 & \Rightarrow & m=2 & \Rightarrow & \sigma(4)=(0,2). \\ n=5 & \Rightarrow & m=2 & \Rightarrow & \sigma(5)=(1,2). \end{array}$$

u.s.w.

(d) Sind L und M abzählbare Mengen, so ist auch $L \times M$ abzählbar.

Beweis. Seien $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to L$, $\rho\colon \mathbb{N}_0 \to M$ sowie

$$\alpha\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad n \mapsto \big(\alpha_1(n), \alpha_2(n)\big)$$

bijektive Abbildungen. Dann ist die Abbildung

$$\beta\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to L \times M, \qquad (m,n) \mapsto \big(\tau(m), \rho(n)\big)$$

bijektiv und somit auch $\beta \circ \alpha\colon \mathbb{N}_0 \to L \times M$. □

(e) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ist abzählbar nach (a), (b) und (d).

Satz 8.3. *Sei M eine nichtleere Menge. Dann gilt: M ist höchstens abzählbar genau dann, wenn eine surjektive Abbildung $\psi\colon \mathbb{N}_0 \to M$ existiert.*

Beweisidee. „$\Rightarrow$": klar.
„$\Leftarrow$": Dies ist trivial, falls M endlich ist. Ist M nicht endlich, so definieren wir zunächst eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}_0$ durch $n_0 = 0$ und

$$n_{k+1} = \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \ n > n_k,\ \psi(n) \notin \psi\big(\{0, \dots, n_k\}\big)\Big\} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Abbildung $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to M$, $\tau(k) = \psi(n_k)$ bijektiv (Beweis zur Übung empfohlen). □

Korollar 8.4. *Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Nach Beispiel 8.2(e) existiert eine Bijektion $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $n \mapsto (\tau_1(n), \tau_2(n))$. Definiere nun $\psi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ durch $\psi(n) = \frac{\tau_2(n)}{\tau_1(n)}$. Dann ist ψ surjektiv. Ferner ist $|\mathbb{Q}| = \infty$. Also folgt mit Satz 8.3, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. □

Korollar 8.5. *Ist L eine abzählbare Menge und $M \subseteq L$, so ist M höchstens abzählbar.*

Beweis. Dies ist trivial im Fall $M = \varnothing$. Ist $M \neq \varnothing$ und $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to L$ eine Abzählung von L, so wählen wir $x \in M$ beliebig und definieren eine surjektive Abbildung $\psi\colon \mathbb{N}_0 \to M$ durch

$$\psi(n) = \begin{cases} \tau(n), & \text{falls } \tau(n) \in M, \\ x, & \text{falls } \tau(n) \notin M, \end{cases}$$

Mit Satz 8.3 folgt, dass M höchstens abzählbar ist. □

Satz 8.6. *Das Intervall $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist überabzählbar, also auch $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ nach Korollar 8.5.*

Beweis. Angenommen, $[0,1)$ wäre höchstens abzählbar. Dann gäbe es gemäß Satz 8.3 eine surjektive Abbildung $\tau\colon \mathbb{N} \to [0,1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir dann die zulässigen triadischen (d.h. die 3-adischen) Entwicklungen der Zahlen

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} 3^{-k} \qquad \text{mit Summanden } a_{nk} \in \{0,1,2\},\ k \in \mathbb{N} \qquad \text{(siehe Satz und Definition 7.24(b))}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei nun

$$c_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } a_{kk} \neq 0, \\ 1, & \text{falls } a_{kk} = 0. \end{cases}$$

Dann ist $(c_k)_k$ eine zulässige Folge in M_3 (siehe Satz und Definition 7.24(b)), welche sich für alle $n \in \mathbb{N}$ im n-ten Folgenglied von der Folge $(a_{nk})_k$ unterscheidet. Sei nun

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \in [0, 1).$$

Aufgrund der in Satz und Definition 7.24(b) bewiesenen Eindeutigkeit der (zulässigen) triadischen Entwicklung folgt

$$x \neq \tau(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

was der Surjektivität von τ widerspricht. Es folgt die Überabzählkeit von $[0, 1)$. □

Satz 8.7. *Ist $I \subseteq \mathbb{N}_0$, $I \neq \varnothing$ und sind M_i, $i \in I$ höchstens abzählbare Mengen, so ist auch $M := \bigcup_{i \in I} M_i$ höchstens abzählbar.*

Beweis. Wegen Korollar 8.5 können wir ohne Einschränkung $I = \mathbb{N}_0$ und $M_i \neq \varnothing$ für $i \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Gemäß Satz 8.3 existieren dann surjektive Abbildungen $\varphi_i \colon \mathbb{N}_0 \to M_i$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Sei nun

$$\tau \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad n \mapsto (\tau_1(n), \tau_2(n))$$

eine Bijektion; dann ist die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N}_0 \to M, \qquad \varphi(n) = \varphi_{\tau_1(n)}(\tau_2(n))$$

surjektiv. Mit Satz 8.3 folgt, dass M höchstens abzählbar ist. □

Korollar 8.8. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Es ist $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, wobei $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Es folgt daher mit Satz 8.7, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar ist. □

Bemerkung 8.9. Man nennt zwei Mengen L und M *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $L \to M$ gibt. Sind L und M endliche Mengen, so sind sie genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Anzahl an Elementen haben. Wir haben in Satz 8.6 gezeigt, dass $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind. Man kann aber zeigen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

9. Produktreihen

Bemerkung 9.1. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Sei ferner

$$\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad k \mapsto (\tau_1(k), \tau_2(k))$$

eine Bijektion und

$$T_k := a_{\tau_1(k)} b_{\tau_2(k)} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann durchläuft die Folge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ alle Produkte $a_i b_j$ mit $i, j \in \mathbb{N}_0$. Daher liegen folgende Fragen nahe: Konvergiert die Reihe $\sum_k T_k$, und gilt im Falle der Konvergenz

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)?$$

Satz 9.2. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$ mit $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, n \mapsto (\tau_1(n), \tau_2(n))$ eine Bijektion, und $T_k := a_{\tau_1(k)} b_{\tau_2(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$ absolut mit Summe AB.*

(b) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ mit $C_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ konvergiert ebenfalls absolut mit Summe AB.*

Bezeichnung: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ heißt Cauchyprodukt *der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.*

Beweis. **(a):** Wir betrachten zunächst speziell die Bijektion

$$\sigma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad n \mapsto (\sigma_1(n), \sigma_2(n))$$

aus Beispiel 8.2(c) zum Pfeildiagramm in Abb. 8.2 und setzen $S_k := a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} S_k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \tag{9.1}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} |S_k| \le \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} |S_k| = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) \le A'B'.$$

mit $A' := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $B' := \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$. Mit Satz 7.5 folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ absolut konvergiert. Ferner gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k \overset{\text{Satz 6.18}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} S_k \overset{(9.1)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = AB.$$

Sei nun τ und $T_k, k \in \mathbb{N}_0$ wie in Teil (a) des Satzes gegeben. Dann ist $\eta := \sigma^{-1}\circ\tau \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion und

$$\tau(k) = \sigma(\eta(k)), \qquad \text{also} \quad T_k = S_{\eta(k)} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit dem Umordnungssatz Satz 7.28 folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$ ebenfalls absolut konvergiert, mit Summe AB.

Bitte beachten Sie den Nachtrag Satz 7.23!

(b): Wir betrachten die Bijektion

$$\gamma \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \qquad n \mapsto (\gamma_1(n), \gamma_2(n))$$

aus Beispiel 8.2(c) zum Pfeildiagramm in Abb. 8.1. Dann ist

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{\ell=\frac{k(k+1)}{2}}^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1} a_{\gamma_1(\ell)} b_{\gamma_2(\ell)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

(Summe über die $(k+1)$-te Diagonale). Aus (a) folgt

$$AB = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\gamma_1(\ell)} b_{\gamma_2(\ell)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=\frac{k(k+1)}{2}}^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1} a_{\gamma_1(\ell)} b_{\gamma_2(\ell)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

mit absoluter Konvergenz dieser Reihe. □

Bemerkung 9.3. Satz Satz 9.2 gilt nicht für *bedingt konvergente* Reihen (d.h. für konvergente Reihen, welche nicht absolut konvergieren). Zum Beispiel ist das Cauchyprodukt der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ mit sich selbst eine divergente Reihe (Übung).

Satz 9.4 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{C}$. Dann sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$ nach Satz und Definition 7.21 absolut konvergent mit Summen $\exp(x)$ bzw. $\exp(y)$. Nach Satz 9.2(b) gilt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$ mit

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \overset{\text{bin.Lehrsatz}}{=} \frac{1}{k!}(x+y)^k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Es folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y)$. □

Bemerkung 9.5. Wie im Beweis von Satz 9.4 verwendet, ist der binomische Lehrsatz auch für komplexe Zahlen a und b (und allgemeiner für Elemente eines kommutativen Rings mit Eins) gültig, wobei der Beweis keiner Änderung bedarf.

Für $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{Q}$ schreiben wir im Folgenden zur Vereinfachung $\exp(z)^r$ statt $\big(\exp(z)\big)^r$.

Korollar 9.6. *Für $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ ist $\exp(nz) = \exp(z)^n$. Insbesondere ist $\exp(0) = 1$.*

Beweis per Induktion nach n. „$n = 0$": $\exp(0 \cdot z) = \exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{0!} = \frac{0^0}{0!} = 1 = \exp(z)^0$.

„$n \Rightarrow n+1$": $\exp((n+1)z) = \exp(nz + z) \overset{\text{Satz 9.4}}{=} \exp(nz)\exp(z) \overset{\text{I.A.}}{=} \exp(z)^n \exp(z) = \exp(z)^{n+1}$. □

Korollar 9.7 (Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.** (a) *Für $z \in \mathbb{C}$ ist*

(i) $\exp(z) \neq 0$,

(ii) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$,

(iii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(b) *Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt*

(i) $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1$,

(ii) $\exp(x) > 0$ (*insbesondere* $\exp(x) \in \mathbb{R}$).

(iii) $\exp(x) < \exp(y)$ *für $y \in \mathbb{R}, y > x$.*

(c) *Für $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(xy) = \exp(y)^x$. Insbesondere ist $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. **(a):** Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{\text{Satz 9.4}}{=} \exp(z)\exp(-z), \quad \text{also } \exp(z) \neq 0 \text{ und } \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

Ferner ist

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} \overset{\text{Satz 7.8}}{=} \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}.$$

(b): Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\overline{\exp(\mathrm{i}x)} \overset{\text{(a)}}{=} \exp(\overline{\mathrm{i}x}) = \exp(-\mathrm{i}x) \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\exp(\mathrm{i}x)}, \quad \text{also } |\exp(\mathrm{i}x)|^2 = \exp(\mathrm{i}x)\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = 1.$$

Somit folgt (i). Zu (ii) und (iii): Ist $x > 0$, so ist

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{>0} > 1. \tag{9.2}$$

Ist $x < 0$, so ist $\exp(x) \overset{(a)}{=} \frac{1}{\exp(-x)} \in (0,1)$. Ist schließlich $y \in \mathbb{R}, y > x$, so ist

$$\exp(y) = \exp(y - x + x) = \underbrace{\exp(y-x)}_{>1 \text{ nach } (9.2)} \exp(x) > \exp(x).$$

(c): Sei zunächst $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, also $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\exp\left(\frac{m}{n}y\right)^n \overset{\text{Korollar 9.6}}{=} \exp(my) \overset{\text{Korollar 9.6}}{=} \exp(y)^m = \left(\exp(y)^{\frac{m}{n}}\right)^n.$$

Es folgt nun $\exp(\frac{m}{n}y) = \exp(y)^{\frac{m}{n}}$ aus (b)(ii) und der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel. Ist $x \in \mathbb{Q}\, x < 0$, so folgt auch

$$\exp(xy) \overset{(a)(ii)}{=} \exp(-xy)^{-1} = \left(\exp(y)^{-x}\right)^{-1} = \exp(y)^x.$$

$\square$

Definition 9.8. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $\mathrm{e}^z := \exp(z)$. Dies ist nach Korollar 9.7(c) konsistent mit der bereits definierten Potenz e^x für $x \in \mathbb{Q}$.

10. Funktionen und Stetigkeit

Definition 10.1. Eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ nennt man (*komplexwertige*) *Funktion.*

(a) Ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man f *reellwertig* und schreibt auch $f\colon D \to \mathbb{R}$.

(b) Ist $D_0 \subseteq D$, so nennt man die Funktion $f|_{D_0}\colon D_0 \to \mathbb{C}$, $f|_{D_0}(z) = f(z)$ *die Einschränkung von f auf D_0*. Falls Klarheit über den Definitionsbereich D_0 herrscht, schreibt man manchmal ebenfalls kurz f anstelle von $f|_{D_0}$.

Beispiele 10.2 (und Bemerkungen)**.** (a) *Polynomfunktionen:* Zu gegebenen $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sei $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Spezialfälle:

- Ist $n = 0$, so ist P eine *konstante* Funktion gegeben durch $P(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Ist $n = 1$, so ist P eine *affin lineare* Funktion gegeben durch $P(z) = a_1 z + a_0$. Mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ erhält man die *identische* Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z) = z$.

(b) Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $\exp(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

(c) Ist $q \in \mathbb{Q}$, so definiert die q-te Potenz $f_q\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_q(x) = x^q$ eine Funktion.

(d) Ist $D \subseteq \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}$ und sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ gegeben, so erhält man neue Funktionen

$$\begin{aligned} &fg\colon D \to \mathbb{C}, && (fg)(z) := f(z) \cdot g(z). \\ &f + g\colon D \to \mathbb{C}, && (f+g)(z) := f(z) + g(z). \\ &\lambda f\colon D \to \mathbb{C}, && (\lambda f)(z) := \lambda \cdot f(z). \end{aligned}$$

Ist ferner $N_g := \{z \in D \mid g(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von g in D, so definiert man

$$\frac{f}{g}\colon D \backslash N_g \to \mathbb{C}, \qquad \frac{f}{g}(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

(e) Sind $P, Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynomfunktionen und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so sind auch

$$P + Q,\ \lambda P\ , PQ\ , P \circ Q\ :\ \mathbb{C}\ \to\ \mathbb{C}$$

Polynomfunktionen. Ferner nennt man in diesem Fall $\frac{P}{Q}\colon \mathbb{C}\backslash N_Q \to \mathbb{C}$ eine *rationale* Funktion.

(f) Man hat Funktionen $|\cdot|$, Re, Im : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und die komplexe Konjugation $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion, so definiert man

$$\begin{aligned} &|f|\colon D \to \mathbb{R}, && |f|(z) := |f(z)| \\ &\operatorname{Re} f\colon D \to \mathbb{R}, && (\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re}(f(z)) \\ &\operatorname{Im} f\colon D \to \mathbb{R}, && (\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im}(f(z)) \\ &\overline{f}\colon D \to \mathbb{C}, && \overline{f}(z) := \overline{f(z)}. \end{aligned}$$

Es gilt also $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \circ f$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \circ f$, $|f| = |\cdot| \circ f$ und $\overline{f} = \bar{\cdot} \circ f$.

Definition 10.3 (Kosinus und Sinus)**.** Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos z &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\ \sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}). \end{aligned}$$

Bemerkung 10.4. (a) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k + (-\mathrm{i}z)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^k \underbrace{\frac{1 + (-1)^k}{2}}_{= \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k - (-\mathrm{i}z)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{k-1} \underbrace{\frac{1 - (-1)^k}{2}}_{= \begin{cases} 1 \text{ für } k \text{ ungerade} \\ 0 \text{ für } k \text{ gerade} \end{cases}} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

$\square$

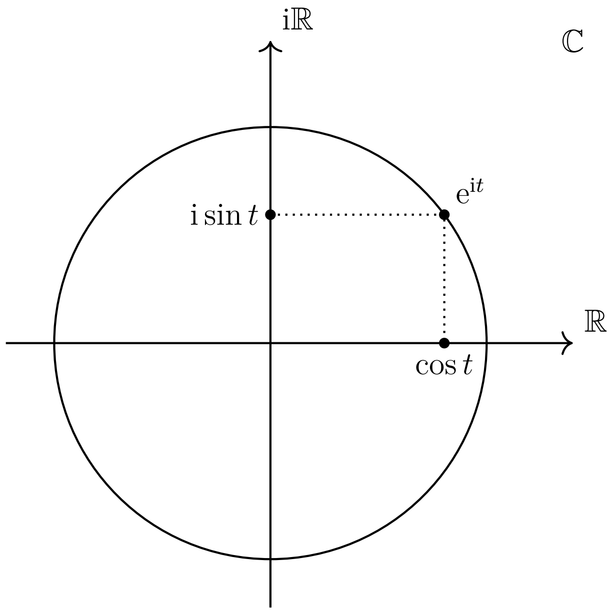

Abbildung 10.1.: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\cos t = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \quad \sin t = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \qquad \in [-1, 1].$$

Beweis. Nach Satz 5.9 ist $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}})$, wobei $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ nach Korollar 9.7(a) gilt. Also folgt $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \cos t$, und damit $|\cos t| = |\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \overset{\text{Satz 5.9}}{\leq} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| \overset{\text{Korollar 9.7(b)}}{=} 1$. Ferner ist $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \overset{\text{Satz 5.9}}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = \sin t$, also $|\sin t| = |\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \overset{\text{Satz 5.9}}{\leq} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$. □

In der Gaußschen Zahlenebene hat man also für $t \in \mathbb{R}$ die Situation wie in Abb. 10.1. Die Rolle von t in diesem Bild („Bogenlänge“) werden wir später klären.

Satz 10.5. (a) *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$,

(ii) $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$,

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(b) *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten folgende Additionstheoreme:*

(i) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ *und* $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,

(ii) $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$ *und* $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$.

Beweis. **(a):** (i) Es ist

$$\cos z + \mathrm{i}\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

(ii) ist klar nach Definition. (iii) Übung.

(b): Es ist

$$\begin{aligned} e^{i(z+w)} &= e^{iz}e^{iw} \overset{(a)(i)}{=} (\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) \\ &= \cos z\cos w - \sin z\sin w + i(\sin z\cos w + \cos z\sin w) \end{aligned}$$

und

$$e^{-i(z+w)} \overset{(a)(ii)}{=} \cos z\cos w - \sin z\sin w - i(\sin z\cos w + \cos z\sin w),$$

also

$$\begin{aligned} 2\cos(z+w) &= e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} = 2(\cos z\cos w - \sin z\sin w), \\ 2i\sin(z+w) &= e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} = 2i(\sin z\cos w + \cos z\sin w). \end{aligned}$$

Es folgt (i). (ii): Übung. □

Definition 10.6. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(a) f heißt *stetig in einem Punkt* $a \in D$, falls für alle Folgen $(z_n)_n$ in D die Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

(b) f heißt *stetig* (oder genauer: *stetig in D*), falls f in allen Punkten aus D stetig ist.

Beispiel 10.7. (a) Konstante Funktionen sind stetig.

(b) $\mathrm{id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(c) Die Funktionen $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}, |\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sowie die komplexe Konjugation $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$, und sei $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Dann folgt mit Korollar 6.12 und Bemerkung 6.13(a):

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, a, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n = \mathrm{Im}\, a, \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|, \quad \lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{a}.$$

Also sind $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}, |\cdot|$ und $\bar{\cdot}$ stetig in a. □

(d) $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig. Vorbemerkung dazu: Für $z \in \mathbb{C}, |z| \le 1$, ist

$$|e^z - 1| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \le |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = |z|(e-1) \overset{\text{Bemerkung 7.22}}{\le} 2|z|. \tag{10.1}$$

Nun zum *Beweis.* Sei $a \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Wir setzen $w_n := z_n - a$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|w_n| \le 1$ für $n \ge N$. Es folgt für $n \ge N$:

$$|e^{z_n} - e^a| = |e^{w_n}e^a - e^a| = |e^a||e^{w_n} - 1| \overset{(10.1)}{\le} 2|e^a||w_n|.$$

Also gilt: $\lim_{n\to\infty}|e^{z_n} - e^a| = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} e^{z_n} = e^a$.

(e) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = [x]$ ist

(i) stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$,

(ii) nicht stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$.

Hier sei $[\cdot]$ die in Satz und Definition 4.6 definierte Gaußklammer. Der *Beweis* von (i) verbleibt als Übung; wir beweisen hier (ii): Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a - \frac{1}{n}) = a$, aber für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$g\left(a - \frac{1}{n}\right) = \left[a - \frac{1}{n}\right] = a - 1$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} g\left(a - \frac{1}{n}\right) = a - 1 \neq a = g(a).$$

Damit ist g nicht stetig in a.

Satz 10.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}, a \in D$, und seien $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ in a stetige Funktionen. Dann gilt:*

(a) *$f + g$ und $f \cdot g$ sind auch stetig in a.*

(b) *Ist $a \notin N_g := \{z \in D \mid g(z) = 0\}$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}\colon D\backslash N_g \to \mathbb{C}$ stetig in a.*

Beweis. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$ und $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(a)$. Mit Satz 6.10 folgt

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(z_n) + g(z_n)\Big) = f(a) + g(a), \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n)g(z_n) = f(a)g(a)$$

$$\text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \text{falls } z_n, a \notin N_g \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 10.9. *Alle Polynomfunktionen und alle rationalen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.* (*Siehe* Beispiele 10.2(a)).

Satz 10.10. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}, a \in D_1$ und Funktionen $f\colon D_1 \to \mathbb{C},\ g\colon D_2 \to \mathbb{C}$ gegeben mit $f(D_1) \subseteq D_2$. Ist f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in D_1 mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Da f stetig in a ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$. Die Stetigkeit von g in $f(a)$ liefert nun

$$\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(z_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Also ist $g \circ f$ stetig in a. □

Korollar 10.11. (a) $\sin, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig.*

(b) *Ist* $D \subseteq \mathbb{C}, a \in D$ *und* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *stetig in* a*, so sind auch die Funktionen* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, |f|\colon D \to \mathbb{R}$ *sowie die Funktion* $\overline{f}\colon D \to \mathbb{C}$ *stetig in* a*.*

Beweis. **(a):** Dies folgt aus der Definition von sin und cos, der Stetigkeit der Exponentialfunktion sowie aus Satz 10.8 und Satz 10.10.

(b): Dies folgt aus Beispiel 10.7(c) und Satz 10.10. □

Bemerkung 10.12. Die Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ in einem Punkt $a \in D$ hängt im Allgemeinen vom Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{C}$ ab. Dabei ist folgendes leicht zu sehen:

(a) Ist f stetig in a und $D_0 \subseteq D$ mit $a \in D_0$, so ist auch die Einschränkung $f|_{D_0}\colon D_0 \to \mathbb{C}$ in a stetig.

(b) Existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subseteq D$ und ist $f|_{U_\delta(a)}\colon U_\delta(a) \to \mathbb{C}$ in a stetig, so ist auch f in a stetig.

Die Abhängigkeit vom Definitionsbereich sieht man z.B. bei der Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \begin{cases} z\cos\dfrac{1}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

- f ist nicht stetig in 0, denn:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n} = 0, \qquad \text{aber} \quad \left|f\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{n}\right| \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} \geq \frac{1}{2n}\mathrm{e}^n \geq \frac{1}{2n}\frac{n^2}{2!} = \frac{n}{4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  also konvergiert die Folge $\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)\right)_n$ nicht gegen $f(0) = 0$.

- Die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f auf $\mathbb{R}$ ist stetig in 0, denn nach Bemerkung 10.4(b) gilt $|f(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist also $(x_n)_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so gilt

  $$|f(x_n)| \leq |x_n| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty, \qquad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0).$$

Satz 10.13 (ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit)**.** *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}, a \in D$ *und* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Dann ist* f *stetig in* a *genau dann, wenn gilt:*

$$\text{(10.2)} \qquad \textit{Zu jedem } \varepsilon > 0 \textit{ existiert ein } \delta > 0 \textit{ mit } f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(a)).$$

(siehe Abb. 10.2).

Man kann (10.2) *auch so formulieren:*

$$\begin{aligned}&\textit{Zu jedem } \varepsilon > 0 \textit{ existiert } \delta > 0 \textit{ derart, dass}\\ &|f(z) - f(a)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } z \in D \textit{ mit } |z - a| < \delta.\end{aligned}$$

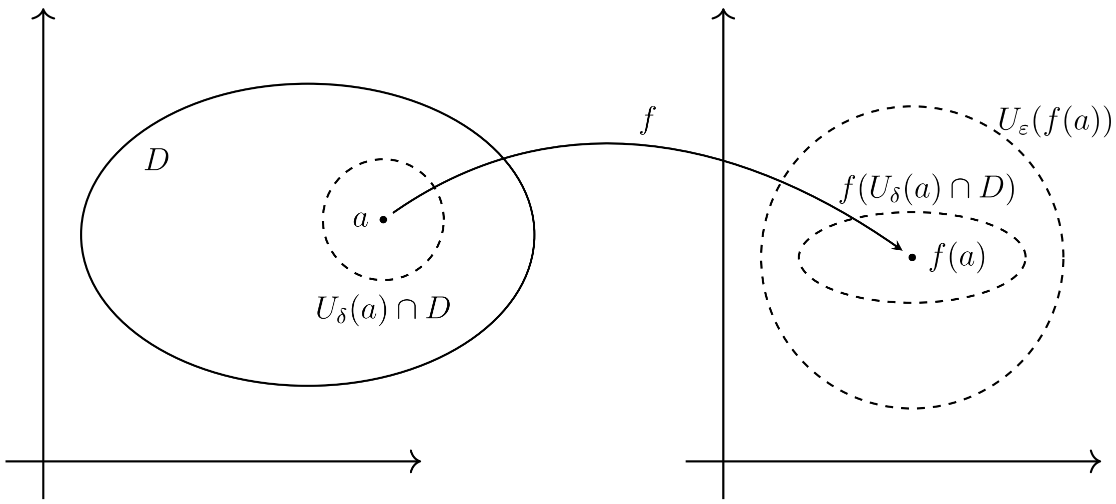

Abbildung 10.2.: ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit

Beweis. „$\Leftarrow$": Sei $(z_n)_n$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, und sei $\varepsilon > 0$. Nach (10.2) existiert $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$. Da $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in U_\delta(a)$ für $n \geq N$, also $f(z_n) \in U_\varepsilon(f(a))$ für $n \geq N$. Es folgt: $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$.

„$\Rightarrow$": Angenommen, (10.2) würde nicht gelten. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $f(U_{\frac{1}{n}}(a) \cap D) \not\subseteq U_\varepsilon(f(a))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein $z_n \in D$ mit $|z_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(z_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Die so gewählte Folge $(z_n)_n$ in D erfüllt also $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, aber $f(z_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$ für $n \to \infty$, im Widerspruch zur Stetigkeit von f in a. $\square$

Definition 10.14. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(a) f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für $x, y \in D$ die Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(b) f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D. \tag{10.3}$$

Bemerkung 10.15. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:

(a) f Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

(b) f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f stetig.

Beweis. **(a):** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $L > 0$ so gewählt, dass die Lipschitz-Bedingung (10.3) gilt. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ folgt dann für $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Somit ist f gleichmäßig stetig.

(b): Dies folgt unmittelbar aus Satz Satz 10.13. $\square$

Beispiel 10.16. (a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2$. Nach Korollar 10.9 ist f stetig. Ferner gilt

$$|f(z) - f(w)| = |z^2 - w^2| = |z + w||z - w| \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}. \tag{10.4}$$

- f ist nicht gleichmäßig stetig, denn sonst gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $|f(z) - f(w)| < 1$ für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \delta$. Dann wäre aber

$$1 > \left|f\Big(n + \frac{\delta}{2}\Big) - f(n)\right| \overset{(10.4)}{=} \Big(2n + \frac{\delta}{2}\Big)\frac{\delta}{2} \geq n\delta \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \qquad ↯!$$

- Ist $R > 0$ beliebig, so ist die Einschränkung von f auf $B_R(0)$ sogar Lipschitz-stetig, denn für $z, w \in B_R(0)$ gilt:

$$|f(z) - f(w)| \overset{(10.4)}{\leq} (|z| + |w|)|z - w| \leq 2R|z - w|.$$

(b) Die Funktion $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig (als rationale Funktion), aber nicht gleichmäßig stetig. Andernfalls gäbe es nämlich zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < 1$ für $x, y \in [0, 1)$ mit $|x - y| < \delta$. Ferner existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Es folgt dann $|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \delta$, aber

$$\left|f\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - f\Big(\frac{1}{n}\Big)\right| = |n^2 - n| = n(n - 1) \geq 2 \qquad ↯!$$

(c) Die Funktion $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. *Beweis:* Übung.

11. Stetige Funktionen auf Intervallen

Bitte beachten sie den Nachtrag Definition 2.10 für Intervalle.

Sei in diesem Kapitel stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Man nennt I ein *kompaktes* Intervall.

Satz 11.1. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(a) *f nimmt auf I ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt Punkte $x, y \in I$ mit $f(x) = \min f(I)$ und $f(y) = \max f(I)$.*

(b) *f ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. **(a):** Sei $M := \sup f(I) = \sup\{f(\tau) \mid \tau \in I\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann existiert eine Folge $(y_n)_n$ in I mit $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$. Da die Folge $(y_n)_n$ beschränkt ist (denn I ist beschränkt), existiert nach Satz Satz 6.31 (Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_k$. Dabei ist $y := \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in [a, b] = I$ wegen Satz 6.23(a). Da f stetig ist, folgt $f(y) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = M$. Also ist $M \in \mathbb{R}$ und $M = \max f(I) = f(y)$. Genauso sieht man, dass $x \in I$ existiert mit $\inf f(I) = \min f(I) = f(x)$.

(b): Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in I$ gibt mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{11.1}$$

Weiterhin existiert nach Satz Satz 6.31 (Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ der so gewählten Folge $(x_n)_n$ in I. Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in I$. Da $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$ gilt, ist auch $x = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$. Da ferner f in x stetig ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} \Big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\Big) = f(x) - f(x) = 0,$$

im Widerspruch zu (11.1). Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 11.2 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $s \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < s < f(b)$ oder $f(a) > s > f(b)$ gegeben. Dann existiert $c \in (a, b)$ mit $f(c) = s$.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $f(a) < s < f(b)$ (andernfalls betrachte $-f$ und $-s$ anstelle von f und s). Sei $K := \{t \in I \mid f(t) \leq s\} \subseteq I$. Dann ist $K \neq \varnothing$, da $a \in K$. Also existiert $c := \sup K$, und es gilt $a \leq c \leq b$. Ferner existiert eine Folge $(t_n)_n$ in K mit $\lim_{n\to\infty} t_n = c$. Da f stetig ist, folgt $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) \leq s$. Insbesondere ist $c < b$, da

$f(b) > s$. Angenommen, es wäre $f(c) < s$. Zu $\varepsilon := s - f(c)$ existiert dann nach Satz 10.13 ein $\delta > 0$ mit $f(I \cap U_\delta(c)) \subseteq U_\varepsilon(f(c))$, also insbesondere

$$f(t) < f(c) + \varepsilon = s \qquad \text{für alle } t \in I \text{ mit } |t - c| < \delta.$$

Dies gilt speziell für $t := c + \min\left\{\frac{\delta}{2}, b - c\right\} \in I$, wobei $t > c$ ist, im Widerspruch zur Definition von c. Somit folgt $f(c) = s$. Ferner ist $c > a$, da $f(a) < s$. □

Korollar 11.3. *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(J)$ auch ein Intervall. Falls I ein kompaktes Intervall ist, gilt $f(I) = [m, M]$ mit $m := \min f(I)$ und $M := \max f(I)$.*

Beweis. Seien $x, y \in f(J)$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$ gegeben. Dann existieren $s, t \in J$ mit $f(s) = x$ und $f(t) = y$. Anwendung von Satz 11.2 auf das Intervall

$$I' := [\min\{s, t\}, \max\{s, t\}] \subseteq J$$

liefert ein $c \in I'$ mit $f(c) = z$. Somit ist $z \in f(J)$ und daher $f(J)$ ein Intervall. Zusammen mit Satz 11.1(a) liefert dies die zweite Aussage. □

Definition 11.4. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \textit{monoton wachsend}, & \text{falls } f(x) \leq f(y) \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } x \leq y; \\ \textit{streng monoton wachsend}, & \text{falls } f(x) < f(y) \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } x < y; \\ \textit{monoton fallend}, & \text{falls } f(x) \geq f(y) \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } x \leq y; \\ \textit{streng monoton fallend}, & \text{falls } f(x) > f(y) \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } x < y. \end{cases}$$

Bemerkung 11.5. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), so ist f injektiv, als Abbildung $D \to f(D)$ also bijektiv. Es existiert in diesem Fall auch eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$, und diese ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Satz 11.6. *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei ferner $f\colon J \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Dann ist $L := f(J)$ wieder ein Intervall, und $f^{-1}\colon L \to J \subseteq \mathbb{R}$ ist stetig.*

Beweis. Dass L ein Intervall ist, haben wir schon in Korollar 11.3 gezeigt. Ohne Einschränkung sei nun f streng monoton wachsend. Um die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen, sei $x \in L$ und $(x_n)_n$ eine Folge in L mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei ferner $t_n := f^{-1}(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $t := f^{-1}(x)$. Zu zeigen ist dann: $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da f streng monoton wächst, gilt

$$\begin{cases} f(t - \varepsilon) < x, & \text{falls } t - \varepsilon \in J, \\ f(t + \varepsilon) > x, & \text{falls } t + \varepsilon \in J. \end{cases}$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existiert also $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{cases} f(t - \varepsilon) < x_n \text{ für } n \geq N, & \text{falls } t - \varepsilon \in J, \\ f(t + \varepsilon) > x_n \text{ für } n \geq N, & \text{falls } t + \varepsilon \in J. \end{cases} \tag{11.2}$$

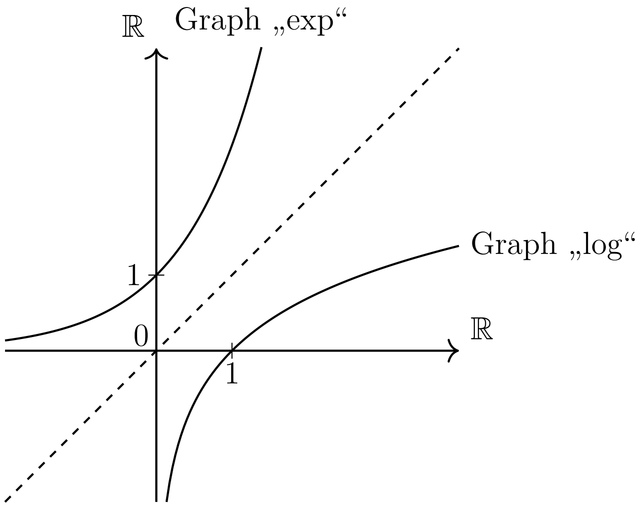

Abbildung 11.1.: Die Umkehrung von „exp“

Wir Behaupten: Falls $t-\varepsilon \notin J$ gilt, dann folgt $t-\varepsilon < s$ für alle $s \in J$. Gäbe es nämlich ein $s \in J$ mit $s \leq t-\varepsilon$, so folgte $t-\varepsilon \in J$ daraus, dass J ein Intervall ist, $s, t \in J$ und $s \leq t-\varepsilon < t$ gelten $\lightning$! Genauso zeigt man $s < t+\varepsilon$ für alle $s \in J$, falls $t+\varepsilon \notin J$. Zusammen mit (11.2) und dem streng monotonen Wachstum von f^{-1} liefert dies

$$t-\varepsilon < t_n < t+\varepsilon \qquad \text{für } n \geq N.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, und somit ist f^{-1} stetig in x. □

Bemerkung 11.7. Der zweite Teil des obigen Beweises liefert auch folgende — auf den ersten Blick überraschende — Aussage: Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon J \to \mathbb{R}$ streng monoton und $L := f(J)$. Dann ist $f^{-1}\colon L \to J$ stetig. Allerdings ist L in diesem Fall im Allgemeinen kein Intervall!

Satz und Definition 11.8. *Die Einschränkung* $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *der Exponentialfunktion auf* $\mathbb{R}$ *ist bijektiv* (*und streng monoton wachsend*) *mit stetiger Umkehrfunktion* $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. *Man nennt* log *den* (natürlichen) Logarithmus, *siehe Abb. 11.1.*

Beweis. Nach Korollar 9.7(b) ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $L := \exp(\mathbb{R}) \subseteq (0,\infty)$. Da $\exp(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq n$ und $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, folgt $\inf L = 0$ und $\sup L = \infty$. Mit Satz 11.6 folgt $L = (0,\infty)$ und die Stetigkeit der Umkehrfunktion $\log\colon L \to \mathbb{R}$ von $\exp\colon \mathbb{R} \to L$. □

Bemerkung 11.9. (a) Mit $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist auch $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(b) Es gilt $\log 1 = 0$, da $\exp 0 = 1$.

Satz 11.10. *Für* $x, y \in (0,\infty)$ *gilt* $\log(x\cdot y) = \log x + \log y$.

Beweis. Nach Satz 9.4 ist $\mathrm{e}^{\log(x)+\log(y)} = \mathrm{e}^{\log x}\mathrm{e}^{\log y} = xy$, also $\log x + \log y = \log(xy)$. $\square$

Bemerkung 11.11. Für $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{Q}$ gilt $a^x = (\mathrm{e}^{\log a})^x = \mathrm{e}^{x \log a}$ nach Korollar 9.7(c). Dies motiviert folgende Definition.

Definition 11.12. Für $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x := \mathrm{e}^{x \log a},$$

die *x-te Potenz von a.*

Satz 11.13. (a) *Ist $a \in (0,\infty)$ fest, so ist die Funktion $g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = a^x$, stetig.*

(b) *Ist $x \in \mathbb{R}$ fest, so ist die Funktion $f_x \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_x(a) = a^x$ stetig.*

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von exp und log sowie aus Satz 10.8 und Satz 10.10. $\square$

Satz 11.14. *Für $a, b \in (0,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $(ab)^x = a^x b^x$

(b) $a^{x+y} = a^x a^y$

(c) $\log(a^x) = x \log a$

(d) $a^{xy} = (a^x)^y$

(e) *g_a aus Satz 11.13*(a) *ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, und für $a < 1$ streng monoton fallend.*

(f) *f_x aus Satz 11.13*(b) *ist für $x > 0$ streng monoton wachsend, und für $x < 0$ streng monoton fallend.*

Beweis. **(a):** $(ab)^x = \mathrm{e}^{x\log(ab)} = \mathrm{e}^{x\log a + x \log b} = \mathrm{e}^{x \log a}\mathrm{e}^{x \log b} = a^x b^x$.
(b): $a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\log a} = \mathrm{e}^{x \log a}\mathrm{e}^{y \log a} = a^x a^y$.
(c): $\log a^x = \log\bigl(\mathrm{e}^{x \log a}\bigr) = x \log a$.
(d): $a^{xy} = \mathrm{e}^{xy \log a} = \mathrm{e}^{y \log(a^x)} = (a^x)^y$.
(e): Es gelte $x < y$. Ist $a > 1$, so folgt $\log a > 0$ und damit $x \log a < y \log a$, also $a^x = \mathrm{e}^{x \log a} < \mathrm{e}^{y \log a} = a^y$. Ist $a < 1$, so folgt $\log a < 0$ und damit $x \log a > y \log a$, also $a^x = \mathrm{e}^{x \log a} > \mathrm{e}^{y \log a} = a^y$.
(f): Es gelte $a < b$, also $\log a < \log b$. Ist $x > 0$, so folgt $x \log a < x \log b$ und damit $a^x = \mathrm{e}^{x \log a} < \mathrm{e}^{x \log b} = b^x$. Ist $x < 0$, so folgt $x \log a > x \log b$ und damit $a^x = \mathrm{e}^{x \log a} > \mathrm{e}^{x \log b} = b^x$. $\square$

Eine weitere wichtige Anwendung des Zwischenwertsatzes ist der Existenzbeweis für Lösungen von Funktionalgleichungen mit stetigen Funktionen. Speziell kann man in manchen Situationen die Existenz von Fixpunkten zeigen. Ein *Fixpunkt* x einer Abbildung $f \colon D \to D$ ist ein $x \in D$ mit $f(x) = x$.

Satz 11.15. *Seien $a < b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt in $[a,b]$.*

Beweis. Betrachte $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \coloneqq f(x) - x$. Dann ist $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Falls weder a noch b eine Nullstelle von g ist, dann folgt $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$. Der Zwischenwertsatz, Satz 11.2, liefert dann eine Nullstelle von g in (a,b). Insgesamt besitzt g also eine Nullstelle in $[a,b]$, welche ein Fixpunkt von f ist. $\square$

12. Polarkoordinaten

In diesem Kapitel wollen wir die Exponentialfunktion als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besser verstehen. Dazu werden wir wichtige Monotonie- und Periodizitätseigenschaften der Funktionen sin, cos kennenlernen und dabei auch der Zahl π begegnen.

Vorab aber zunächst eine Erinnerung an das Leibnizkriterium aus Satz 7.16: Ist $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent mit der Restgliedabschätzung

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{12.1}$$

Hilfssatz 12.1. (a) *Für* $t \in (0,2]$ *ist* $\sin t > 0$.

(b) $\cos\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend.*

Beweis. (a) Sei $t \in (0,2]$. Dann ist $\left(\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_k$ eine monoton fallende Nullfolge, also gilt

$$|\sin t - t| \overset{\text{Bemerkung 10.4(a)}}{=} \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \overset{(12.1)}{\leq} \frac{t^3}{6}.$$

Es folgt $\sin t - t \geq -\frac{t^3}{6}$, also $\sin t \geq t(1-\frac{t^2}{6}) \geq t(1-\frac{4}{6}) = \frac{t}{3} > 0$.

(b) Für $s,t \in [0,2]$, $s < t$, sind $\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2} \in (0,2)$, also

$$\cos t - \cos s \overset{\text{Satz 10.5(b)}}{=} -2\sin\frac{t+s}{2}\sin\frac{t-s}{2} < 0.$$

□

Korollar 12.2. *Die Funktion* cos *hat genau eine Nullstelle in* $(0,2) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Aus Hilfssatz 12.1(b) folgt, dass cos höchstens eine Nullstelle in $(0,2)$ hat. Die Existenz einer Nullstelle in $(0,2)$ folgt aus dem Zwischenwertsatz Satz 11.2, da $\cos\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist mit $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$. Letzteres haben wir bereits in Beispiel 7.17(b) bewiesen. Zur Wiederholung: Es ist

$$|\cos 2 + 1| = |\cos 2 - 1 + 2| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3},$$

gemäß der obigen Restgliedabschätzung (12.1) und somit $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$. □

Definition 12.3. π sei die nach Korollar 12.2 eindeutig bestimmte Zahl in $(0,4) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Satz 12.4. (a) *Es gilt* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ *und*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

(b) *Die Exponentialfunktion ist* $2\pi\mathrm{i}$ -periodisch*, d.h. für* $z \in \mathbb{C}$ *und* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$*.*

Beweis. (a) Nach Definition ist $\frac{\pi}{2} \in (0,2)$, also $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ nach Hilfssatz 12.1(a) und

$$1 = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2}.$$

Es folgt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und somit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$. Ferner ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^2 = \mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = (-1)\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ und $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^2 = (-1)^2 = 1$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} \overset{\text{Korollar 9.6}}{=} (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^k \overset{\text{(a)}}{=} 1^k = 1,$$

und $\mathrm{e}^{-2k\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}} = 1$. Also gilt

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot 1 = \mathrm{e}^z \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Korollar 12.5. (a) *Die Funktionen „*$\cos$*" und „*$\sin$*" sind* 2π*-periodisch, d.h. für* $z \in \mathbb{C}$ *und* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z \qquad \textit{und} \qquad \cos(z + 2k\pi) = \cos z$$

(b) *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt ferner*

(i) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$ *und* $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$

(ii) $\cos(z + \pi) = -\cos z$ *und* $\sin(z + \pi) = -\sin z$*.*

Beweis. **(a):** Dies folgt aus Satz 12.4(b) und der Definition von sin und cos, siehe Definition 10.3.

(b): (i) Dies folgt aus Satz 10.5(b)(i), da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. (ii) Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\cos(z + \pi) \overset{\text{(i)}}{=} -\sin(z + \frac{\pi}{2}) \overset{\text{(i)}}{=} -\cos z$$

und

$$\sin(z + \pi) \overset{\text{(i)}}{=} \cos(z + \frac{\pi}{2}) \overset{\text{(i)}}{=} -\sin z.$$

□

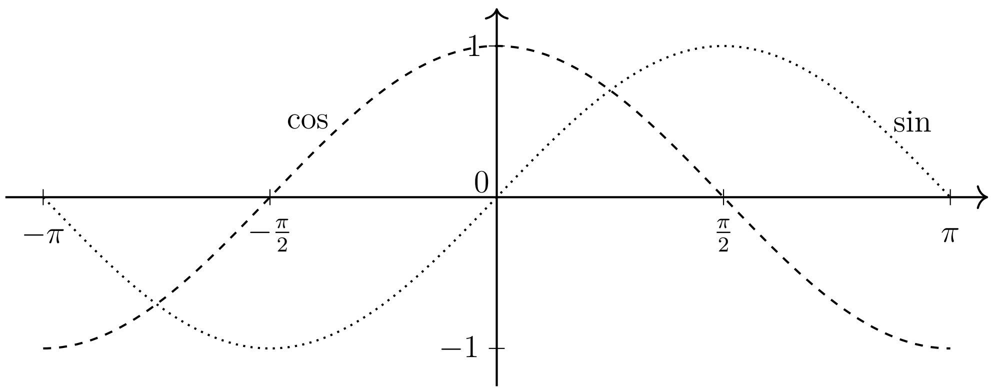

Abbildung 12.1.: Die Graphen von cos und sin auf $[-\pi, \pi]$

Satz 12.6. (a) $\sin t > 0$ *für* $t \in (0, \pi)$.

(b) $\cos\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend.*

(c) $\cos t > 0$ *für* $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(d) $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

Beweis. **(c):** Ist $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq [0, 2]$, so folgt $\cos t > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ wegen Hilfssatz 12.1(b). Ist $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, so gilt ebenfalls $\cos t = \cos(-t) > 0$.

(a): Dies folgt aus (c) und Korollar 12.5(b)(i).

(b): Für $s, t \in [0, \pi]$, $s < t$ sind $\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2} \in (0, \pi)$, also

$$\cos t - \cos s \overset{\text{Satz 10.5(b)}}{=} -2 \sin \frac{t+s}{2} \sin \frac{t-s}{2} < 0.$$

(d): Dies folgt aus (b) und Korollar 12.5(b)(i).

□

Um sich die bisher gewonnenen Erkenntnisse über die Winkelfunktionen besser merken zu können, ist es empfehlenswert, sich ein Bild der Graphen von cos und sin auf einem Intervall einzuprägen, siehe Abb. 12.1.

Bemerkung 12.7. Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Die bisherigen Ergebnisse (siehe Korollar 9.7(b)(i), Satz 12.4, Korollar 12.5 und Satz 12.6) zeigen, dass sich der Punkt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit wachsendem $t \in \mathbb{R}$ gegen den Uhrzeigersinn (d.h. im „mathematisch positiven" Drehsinn) auf S^1 bewegt. Dabei ist $|t|$ ein Maß für die von 1 bis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ zurückgelegte Strecke auf S^1 (Bogenlänge), wie folgende Überlegung zeigt: Zunächst zeigen wir

$$\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| \leq \frac{1}{2}|z|^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1. \tag{12.2}$$

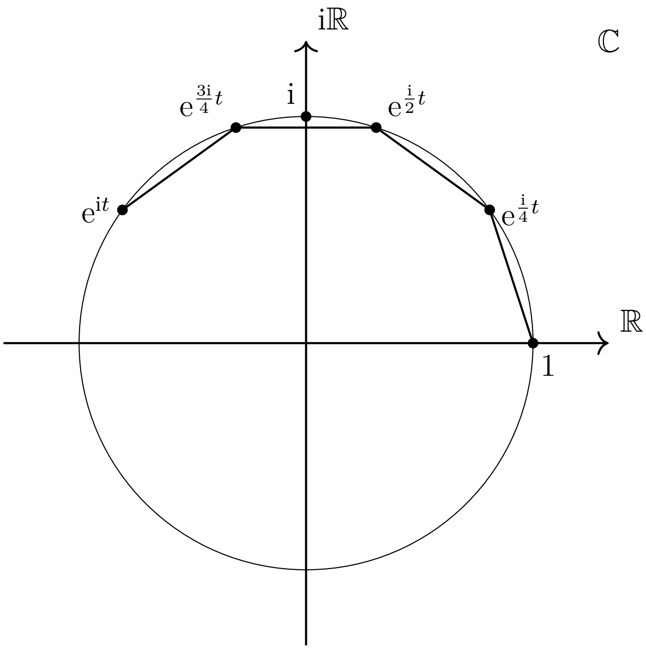

Abbildung 12.2.: Approximation der Bogenlänge

Dies folgt aus Bemerkung 10.4(a) und $\mathrm{e} \leq 3$: Sei $|z| \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2k+1)!} = |z|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{2(k-1)}}{(2k+1)!} \\
&\leq |z|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \leq |z|^2 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} = |z|^2 \left(\mathrm{e} - \frac{5}{2}\right) \leq \frac{1}{2}|z|^2.
\end{aligned}
$$

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $L_n := \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{n}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k-1}{n}t}|$. L_n ist die Länge des *Polygonzugs* durch die Punkte $1, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}t}, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{n}t}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n-1}{n}t}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, siehe Abb. 12.2. Dabei gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{n}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k-1}{n}t}\right|^2 &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k-1}{n}t}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}t} - 1)\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}t} - 1\right|^2 = (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}t} - 1)(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{n}t} - 1) \\
&= 2 - 2\cos\frac{t}{n} \overset{\text{Satz 10.5(b)(ii)}}{=} 4\sin^2\frac{t}{2n} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

also $L_n = 2n|\sin\frac{t}{2n}|$. Man erhält nun mit (12.2)

$$
\lim_{n\to\infty} L_n = |t| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin\frac{t}{2n}}{\frac{t}{2n}}\right| = |t|,
$$

und dies ist ein Maß für die Bogenlänge von 1 bis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Es folgt insbesondere:

- $\frac{\pi}{2}$ ist die Länge des Viertelkreisbogens.

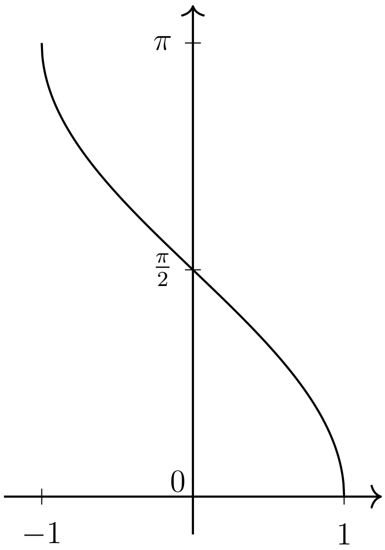

Abbildung 12.3.: Graph von arccos

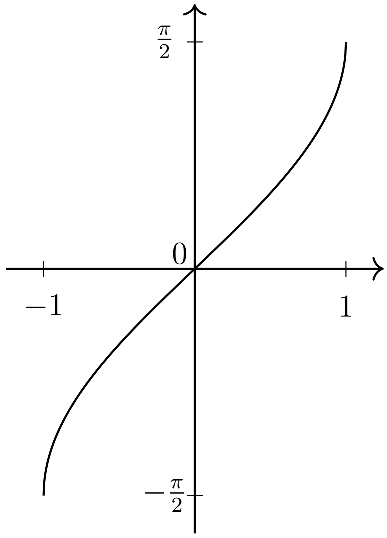

Abbildung 12.4.: Graph von arcsin

- 2π ist der Umfang von S^1.

Die Zahl t selbst nennt man in diesem Zusammenhang *Winkel im Bogenmaß.*

Satz und Definition 12.8 (Arcusfunktionen)**.** *Die Funktionen*

$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1] \qquad \textit{und} \qquad \sin\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

sind bijektiv mit stetigen Umkehrfunktionen Arcus Cosinus *und* Arcus Sinua*,*

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \qquad \textit{und} \qquad \arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Dabei ist arccos *streng monoton fallend und* arcsin *streng monoton wachsend (siehe Abb. 12.3 und 12.4).*

Beweis. Nach Bemerkung 10.4(b) ist $\cos(\mathbb{R}) \subseteq [-1,1]$ und $\sin(\mathbb{R}) \subseteq [-1,1]$. Da ferner

$$\cos 0 = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos\pi = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

folgt mit Korollar 11.3:

$$\cos([0,\pi]) = [-1,1] = \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Zudem ist

- $\cos|_{[0,\pi]}$ streng monoton fallend nach Satz 12.6(b), also auch die Umkehrfunktion arccos;

- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng monoton wachsend nach Satz 12.6(d), also auch die Umkehrfunktion arcsin.

Die Stetigkeit von arcsin und arccos folgt schließlich aus Satz 11.6. $\square$

Satz und Definition 12.9. *Die Abbildung*

$$P\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, \qquad P(r,\varphi)=re^{\mathrm{i}\varphi}=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

ist bijektiv mit Inverser

$$Q\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to(0,\infty)\times(-\pi,\pi], \qquad Q(z)=(|z|,\arg z),$$

wobei

$$\arg z := \begin{cases} \arccos\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, & \text{\textit{falls} } \operatorname{Im} z\geq 0,\\ -\arccos\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, & \text{\textit{falls} } \operatorname{Im} z< 0,\end{cases}$$

das Argument von z *heißt.*

Beweis. Sei zunächst $(r,\varphi)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ gegeben. Wir setzen $z:=P(r,\varphi)=re^{\mathrm{i}\varphi}$. Dann ist $|z|=r|e^{\mathrm{i}\varphi}|=r>0$ und $\operatorname{Im} z=r\sin\varphi$, also

$$\operatorname{Im} z\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi\geq 0.$$

Für $\varphi\in(-\pi,0)$ ist $\arccos(\cos(\varphi))=\arccos(\cos(-\varphi))=-\varphi$. Es folgt daher

$$\arg(z)=\begin{cases}\arccos(\cos\varphi)=\varphi, & \text{falls } \operatorname{Im} z\geq 0,\\ -\arccos(\cos\varphi)=\varphi, & \text{falls } \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

Dies zeigt $(Q\circ P)(r,\varphi)=Q(z)=(r,\varphi)$. Sei nun $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gegeben. Wir setzen $r:=|z|>0$, $\varphi:=\arg(z)\in(-\pi,\pi]$ und $w:=(P\circ Q)(z)=re^{\mathrm{i}\varphi}$. Zu zeigen ist $w=z$. Dabei gilt $|w|=r=|z|$ und

$$\operatorname{Re} w=r\cos\varphi=r\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}=\operatorname{Re} z,$$

also auch

$$(\operatorname{Im} w)^2=|w|^2-(\operatorname{Re} w)^2=|z|^2-(\operatorname{Re} z)^2=(\operatorname{Im} z)^2.$$

Nach Definition von arg und wegen $\arccos(t)\in[0,\pi]$ für $t\in[-1,1]$ gilt schließlich

$$\operatorname{Im} z\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi\in[0,\pi] \quad\Leftrightarrow\quad \sin\varphi\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Im} w\geq 0,$$

also folgt auch $\operatorname{Im} w=\operatorname{Im} z$ und somit $w=z$. $\square$

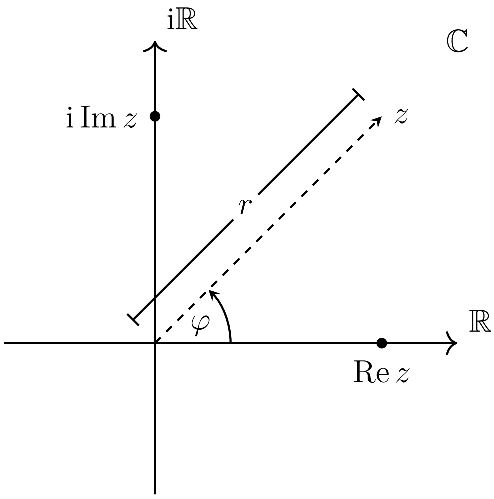

Abbildung 12.5.: Polarkoordinaten von $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$

Bemerkung 12.10 (Wichtig)**.** (a) Nach Satz und Definition 12.9 kann man jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in eindeutiger Weise als $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ schreiben. Diese Schreibweise nennt man *Polarkoordinatendarstellung* von z, und die Zahlen $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ nennt man die *Polarkoordinaten* von z, siehe Abb. 12.5. So ist z.B. die Polarkoordinatendarstellung von $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ gegeben durch $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Um dies zu sehen, zeigen wir zunächst:

$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{also} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{12.3}$$

Sei dazu $w := e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Dann gilt $w^3 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, also

$$0 = w^3 + 1 = (w+1)(w^2 - w + 1) = (w+1)\left(w - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(w - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{12.4}$$

Ferner ist $\operatorname{Im} w = \sin\frac{\pi}{3} > 0$ gemäß Satz 12.6(b). In (12.4) sind also auf der rechten Seite die ersten beiden Faktoren nicht Null. Somit muss der letzte Faktor verschwinden, d.h. es gilt $w = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, wie in (12.3) behauptet. Aus (12.3) folgt dann direkt $z = 2w = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(b) Wegen Korollar 12.5(b)(i) haben wir mit (a)

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

und

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Zusammen mit $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ erhält man die folgende, leicht zu merkende Tabelle spezieller Werte der Winkelfunktionen in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

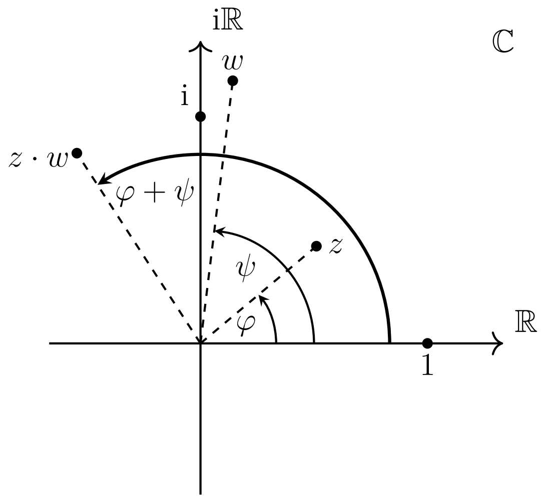

Abbildung 12.6.: Multiplikation von z und w in Polarkoordinaten

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

(c) Zur geometrischen Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$: Seien $w = r_1 e^{i\varphi_1}, z = r_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$ mit $r_1, r_2 > 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $zw = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, d.h. die Beträge werden multipliziert und die Argumente („Winkel") addiert, siehe Abb. 12.6. Die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ entspricht also einer Drehung um den Winkel φ mit Drehzentrum 0.

(d) Nach Korollar 9.7(a) ist $\exp(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tatsächlich gilt $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn nach Satz und Definition 12.9 lässt sich ein beliebiges Element $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eindeutig schreiben als

$$z = re^{i\varphi} = e^{a+i\varphi} \qquad \text{mit } (r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi] \text{ und } a := \log r \in \mathbb{R}.$$

Dies zeigt sogar, dass die Exponentialfunktion den „Streifen"

$$T := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\} \ \subseteq \ \mathbb{C}$$

bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet. Aus der 2πi-Periodizität (siehe Satz 12.4(b)) kann man schließlich folgern, dass die Exponentialfunktion alle Streifen der Form

$$T_\lambda := \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda < \operatorname{Im} z \leq \lambda + 2\pi\} \qquad \text{und} \qquad T^\lambda := \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda \leq \operatorname{Im} z < \lambda + 2\pi\}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet. Abb. 12.7 verdeutlicht, wie die Exponentialfunktion zur reellen Achse parallele Streifen abbildet.

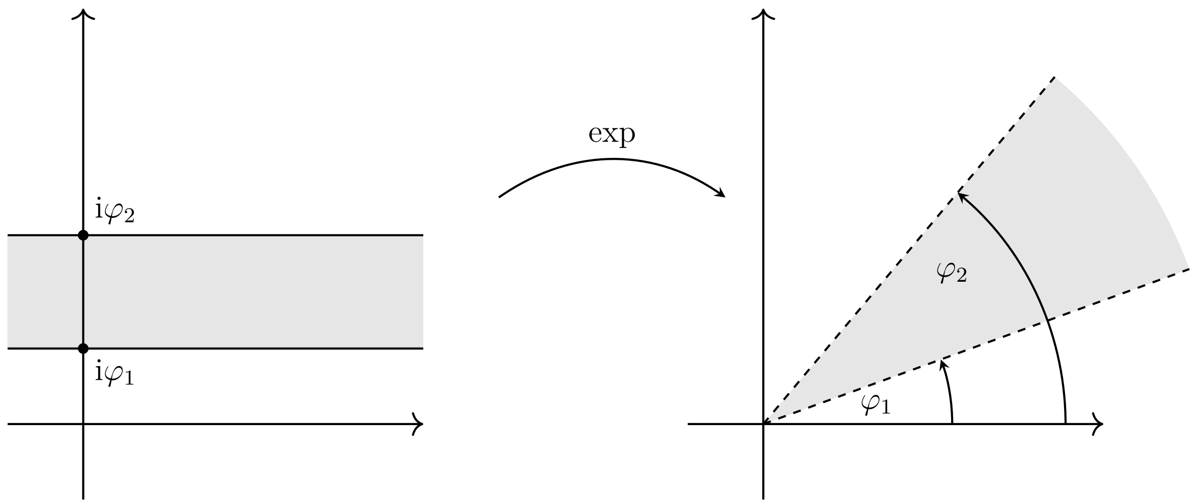

Abbildung 12.7.: Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion

13. Funktionengrenzwerte

Definition 13.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von D, wenn es eine Folge $(z_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

(b) Seien $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von D. Existiert eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lambda$ für jede Folge $(z_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ gilt, so schreiben wir

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lambda \qquad \text{oder} \qquad f(z) \to \lambda \quad \text{für } z \to a.$$

Wir nennen dann λ den *Grenzwert von f im Punkt a.*

Beispiele 13.2. (a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein *nicht-entartetes Intervall* (d.h. I besteht aus mehr als einem Punkt), so ist jeder Punkt $a \in I$ und jeder Randpunkt von I ein Häufungpunkt von I.

(b) Die Menge $\mathbb{Z}$ besitzt keine Häufungspunkte.

(c) Ist $M := \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, so ist 0 der einzige Häufungspunkt von M.

(d) Offensichtlich ist 0 ein Häufungspunkt von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Seien nun $f, g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}$ und $g(z) = \frac{\sin z}{z}$. Dann ist

(i) $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, denn für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| \leq 1$ gilt

$$|f(z) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} - 1\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\right| \leq |z| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |z|(\mathrm{e} - 2) \leq |z|.$$

(ii) $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ wegen (12.2).

(e) Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Dann existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, denn die Folgen $\left(\frac{1}{\pi n}\right)_n$ und $\left(\frac{1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\right)_n$ sind beides Nullfolgen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$$

$$\text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

(f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = [1 - |x|]$, wobei $[\cdot]$ hier die Gaußklammer bezeichne. Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Satz 13.3. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\lim_{z\to a} f(z) = \lambda$.

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass*

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |z - a| < \delta.$$

(iii) *Die Funktion*

$$\tilde{f}\colon D \cup \{a\} \to \mathbb{C}, \qquad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \setminus \{a\}, \\ \lambda, & z = a, \end{cases}$$

ist stetig in a.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Angenommen, (ii) wäre falsch. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in D \setminus \{a\}$ mit $|z_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(z_n) - \lambda| \geq \varepsilon$. Dies widerspricht (i), da $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Dies folgt direkt aus Satz 10.13.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“: Sei $(z_n)_n$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Da $\tilde{f}$ in a stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(z_n) = \tilde{f}(a) = \lambda.$$

Es folgt $\lim_{z\to a} f(z) = \lambda$. □

Korollar 13.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:*

(a) *Ist a kein Häufungspunkt von D, so ist f stetig in a.*

(b) *Ist a ein Häufungspunkt von D, so ist f genau dann stetig in a, wenn $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$ gilt.*

Beweis. (a) ist klar nach Definition. (b) folgt direkt aus Satz 13.3. □

Bemerkung 13.5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, und sei $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D. Seien ferner $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen derart, dass $\lambda := \lim_{z\to a} f(z)$ und $\mu := \lim_{z\to a} g(z)$ existieren. Dann gilt:

(a) $\lim_{z\to a}\big(f(z) + g(z)\big) = \lambda + \mu$,

(b) $\lim_{z\to a} f(z)g(z) = \lambda\mu$,

(c) Ist $\mu \neq 0$, so ist a auch ein Häufungspunkt von $D_g := \{z \in D \mid g(z) \neq 0\}$, und es gilt $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lambda}{\mu}$.

(d) Ist $h\colon f(D) \cup \{\lambda\} \to \mathbb{C}$ eine in λ stetige Funktion, so ist $\lim_{z\to a} h(f(z)) = h(\lambda)$.

Der Einfachheit halber betrachtet man für reellwertige Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch Häufungspunkte und Grenzwerte, die im Unendlichen liegen, sowie einseitige Grenzwerte:

Definition 13.6. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, so schreibt man

- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(b) Ist $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so definiert man die *einseitigen Grenzwerte von f bei a* wie folgt:

- $\lim_{x\to a+} f(x) := c$, falls a ein Häufungspunkt von $D \cap (a,\infty)$ ist und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in $D \cap (a,\infty)$ gilt, die $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ erfüllen. Alternative Schreibweisen: $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ oder $\lim_{x\searrow a} f(x)$ (*rechtsseitiger Grenzwert*).
- $\lim_{x\to a-} f(x) := c$, falls a ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty,a)$ ist und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in $D \cap (-\infty,a)$ gilt, die $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ erfüllen. Alternative Schreibweisen: $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ oder $\lim_{x\nearrow a} f(x)$ (*linksseitiger Grenzwert*).

(c) Ist $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so schreibt man

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ und falls mindestens eine solche Folge existiert.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ und falls mindestens eine solche Folge existiert.

Bemerkung 13.7. Wie in Satz 13.3(ii) kann man auch die Grenzwerte $\pm\infty$ und Grenzwerte bei $\pm\infty$ mit Hilfe von Umgebungen charakterisieren: Falls $a \in \mathbb{R}$ liegt, so gilt $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq M$ für alle $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ gilt. Andererseits gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x \in [M,\infty)$ gilt. Enntsprechendes gilt für $-\infty$ und für Kombinationen dieser verschiedenen Fälle.

Satz 13.8. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt sowohl von $D \cap (-\infty,a)$ als auch von $D \cap (a,\infty)$. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es gilt dann:* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte von f bei a existieren und übereinstimmen. Tritt dieser Fall ein, dann gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x). \tag{13.1}$$

Beweis. „$\Rightarrow$": trivial. „$\Leftarrow$": Sei $c := \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Fall: $c \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Satz 13.3 $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass $|f(x)-c| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap \big((a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_2)\big)$ gilt. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt also $|f(x)-c| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap \big((a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)\big)$. Dies liefert (13.1).

2. Fall: $c = \pm\infty$. Analog zum 1. Fall unter Verwendung von Bemerkung 13.7. $\square$

Beispiel 13.9. (a) Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Für die Funktion $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, existiert $\lim_{x\to 0} g(x)$ nach Satz 13.8 jedoch nicht, denn $\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty$, aber $\lim_{x\to 0-} g(x) = -\infty$.

(b) Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \alpha + 1$. Dann gilt

$$\mathrm{e}^x \geq \frac{x^m}{m!} \geq \frac{x^{\alpha+1}}{m!} \qquad \text{für } x \geq 1,$$

also $0 \leq \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} \leq \frac{m!}{x}$ für $x \geq 1$. Da $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt, folgt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$. $\square$

(d) Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, gilt $\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0$, wobei die α-te Potenz von $x > 0$ wie in Definition 11.12 durch $x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$ definiert sei. Wählt man nämlich $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \alpha$, so ist $0 < x^\alpha < x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ für $x \leq 1$, wobei aufgrund der Stetigkeit der n-ten Wurzel gilt: $\sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{0} = 0$ für $x \to 0+$. Es folgt $\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0$, wie behauptet, und daher setzt man auch $0^\alpha := 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

(e) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$. Sei nämlich $(x_n)_n$ eine Folge in $(0,\infty)$ mit $x_n \to \infty$, und sei $\kappa \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq \mathrm{e}^\kappa$ für $n \geq n_0$, also $\log x_n \geq \kappa$ für $n \geq n_0$.

(f) Aus (e) folgt

$$\lim_{x\to 0+} \log x = \lim_{x\to\infty} \log \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} (-\log x) = -\infty.$$

(g) Für $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \log x = 0$. Ist nämlich $(x_n)_n$ eine Folge in $(0,\infty)$ mit $x_n \to \infty$, so folgt gemäß (e)

$$y_n := \alpha \log x_n \to \infty \qquad \text{für } n \to \infty,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-\alpha} \log x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y_n} y_n}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^y} \overset{\text{(c)}}{=} 0.$$

Ferner liefert der Übergang von x zu $\frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \log x = \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \log \frac{1}{x} = -\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \log x = 0.$$

(h) Aus (g) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{x \log x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

14. Differentiation

Definition 14.1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$.

(a) Wir definieren den *Differenzenquotienten von f bei a* durch

$$S_a f\colon D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, \qquad S_a f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geometrische Bedeutung von $S_a f(x)$ (siehe Abb. 14.1):

- Sekantensteigung von f über a und x.
- Mittlere Steigung von f zwischen a und x.

(b) f heißt *differenzierbar in a*, wenn a ein Häufungspunkt von D ist und der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} S_a f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Bei der letzten Darstellung beachte man, dass der Quotient nur für $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ und $a+h \in D$ definiert ist. Im Falle der Existenz heißt $f'(a)$ die *Ableitung von f in a*.

Interpretation (siehe Abb. 14.2):

- Tangentensteigung von f bei a.
- Lokale Änderungsrate von f bei a.

(c) f heißt *differenzierbar auf D*, wenn f in allen Punkten aus D differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion

$$f'\colon D \to \mathbb{R}, \qquad a \mapsto f'(a)$$

die *Ableitung von f*.

(d) Ist f differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar*. Man setzt

$$C^1(D) := \{f\colon D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}.$$

Beispiele 14.2. (a) Seien $c, d \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = cx + d \qquad (\textit{affin lineare Funktion})$$

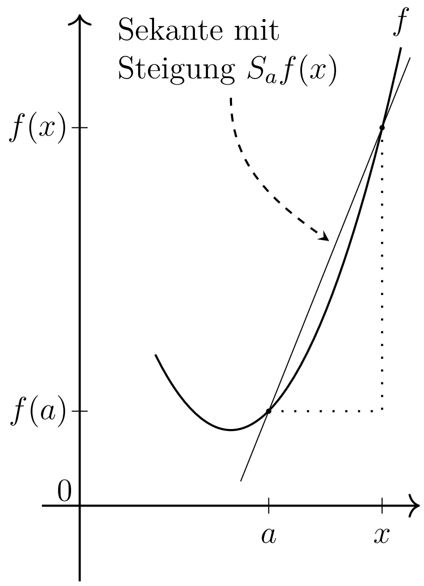

Abbildung 14.1.: Sekantensteigung als Differenzenquotient

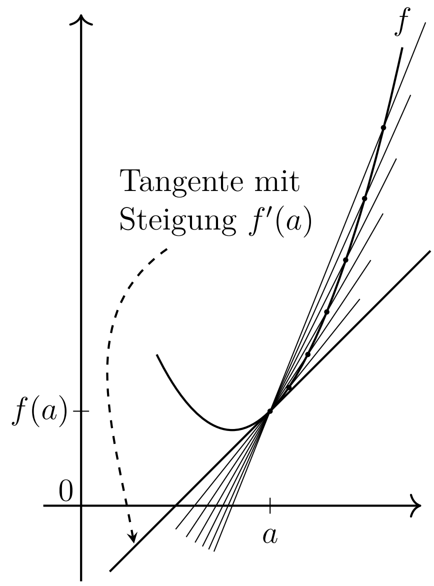

Abbildung 14.2.: Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigungen

Dann ist f stetig differenzierbar mit $f'(a) = c$ für $a \in \mathbb{R}$. Im Spezialfall $c = 0$ (d.h. f konstant) folgt $f' \equiv 0$.

Hier und im Folgenden verwenden wir das Gleichheitssymbol $\equiv$, um auszudrücken, dass zwei auf der gleichen Menge definierten Funktionen in allen Punkten dieser Menge denselben Wert annehmen. $f' \equiv 0$ bedeutet also: $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^a}{h} \overset{\text{Satz 9.4}}{=} \mathrm{e}^a \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \overset{\text{Beispiele 13.2(d)}}{=} \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a.$$

Also ist exp in a differenzierbar mit $\exp'(a) = \exp a$. □

(c) Die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit $\sin' = \cos$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \overset{\text{Satz 10.5(b)}}{=} \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \overset{\text{Beispiele 13.2(d)}}{=} \cos a \cdot 1$$

Also ist sin in a differenzierbar mit $\sin'(a) = \cos a$. □

(d) Die Funktion $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar in 0, denn $x_n := (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, aber

$$\frac{|x_n| - |0|}{x_n - 0} = \frac{|x_n|}{x_n} = (-1)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

und diese Folge konvergiert nicht. Die Einschränkungen

$$|\cdot|\colon [0, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad |\cdot|\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$$

sind jedoch in 0 differenzierbar!

Bemerkung 14.3 (Wichtig)**.** Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a. Dann ist die Funktion

$$\varphi\colon D \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} S_a f(x), & x \neq a, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$$

nach Satz 13.3 stetig in a. Ferner gilt

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a) \qquad \text{für } x \in D,$$

also ist auch f in a stetig.

Satz 14.4 (Ableitungsregeln)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ in a differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *$f + g\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in a mit $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(b) *$\lambda f\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in a mit $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(c) *$fg\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$* (Produktregel, Leibnizregel)*.*

(d) *Ist $a \in D_g := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon D_g \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. (a) und (b) folgen direkt aus der Definition.
Zu (c): Dies folgt, da

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &\to f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \text{für } x \to a.\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass g nach Bemerkung 14.3 in a stetig ist.

Zu (d): Da g gemäß Bemerkung 14.3 in a stetig ist, mit $g(a) \neq 0$, ist a auch ein Häufungspunkt von D_g. Ferner gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \;\to\; -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \quad \text{für } x \to a,\; x \in D_g \setminus \{a\},$$

und somit ist $\frac{1}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Mit (c) folgt dann die Differenzierbarkeit von $\frac{f}{g}$ in a mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

wie behauptet. $\square$

Beispiel 14.5. (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$$

differenzierbar, mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und ${f_0}' \equiv 0$. Dies ist klar für $n = 0, 1$ (siehe Beispiele 14.2(a)) und folgt induktiv aus Satz 14.4(c) für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$f_n'(x) = (f_1 f_{n-1})'(x) = 1 \cdot f_{n-1}(x) + x \cdot f_{n-1}'(x) = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, ist

$$f_n\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n$$

differenzierbar mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setzt man nämlich $m := -n$, so folgt mit (a) und Satz 14.4(d):

$$\begin{aligned} f_n'(x) = \left(\frac{1}{f_m}\right)'(x) = -\frac{f_m'(x)}{f_m(x)^2} &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Satz 14.6 (Kettenregel)**.** *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D_1$ sowie $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$, $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D_1) \subseteq D_2$ und derart, dass f in a und g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g \circ f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Beweis. Da g in $f(a)$ differenzierbar ist, ist die Funktion

$$\gamma\colon D_2 \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, & y \neq f(a), \\ g'(f(a)), & y = f(a), \end{cases}$$

stetig in $f(a)$. Ferner gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \gamma(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{für } x \in D_1 \setminus \{a\},$$

wobei

$$\lim_{x \to a} \gamma(f(x)) = \gamma(f(a)) = g'(f(a)) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

gilt. Es folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) f'(a),$$

wie behauptet. □

Beispiel 14.7. (a) Nach Korollar 12.5 ist $\cos = \sin \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$. Nach Beispiele 14.2 sind sin und f differenzierbar, also nach Satz 14.6 auch cos mit

$$\cos'(x) = \sin'(f(x)) f'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Weitere Beispiele zur Kettenregel folgen später, siehe z.B. Beispiel 14.10(b).

(b) Wir betrachten die Funktionen

$$\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \qquad \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (\textit{Tangens})$$

und

$$\cot\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (\textit{Kotangens}).$$

Gemäß (a) und Satz 14.4(d) sind dann tan und cot differenzierbar, wobei

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos x - \cos'(x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

und (ähnlich)

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \qquad \text{für } x \in (0, \pi)$$

gilt.

Bemerkung 14.8 (zu alternativen Bezeichnungen)**.** Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so schreibt man auch $\frac{d}{dx}f(x)$ anstelle von $f'(x)$. Dies ist irreführend, denn hier steht x einerseits für die Variable, nach der differenziert wird, und andererseits für den Punkt, an dem die Ableitung ausgewertet wird.

Allerdings ist die Schreibweise praktisch bei der Anwendung der Kettenregel. So kann man z.B. Beispiel 14.7(a) so abkürzen:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin'(x+\frac{\pi}{2})\frac{d}{dx}\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big) = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Ist aber $a \in D$ fest gewählt, so kann man **nicht** $\frac{d}{da}f(a)$ anstelle von $f'(a)$ schreiben. In diesem Fall schreibt man $\frac{df}{dx}(a)$ oder $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$.

Satz 14.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton und $a \in I$ so, dass f in a differenzierbar ist mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}\colon f(I) \to I$ in $y := f(a)$ differenzierbar, mit*

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Sei $(y_n)_n$ eine Folge in $f(I) \setminus \{y\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, und sei $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \setminus \{a\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Bemerkung nach Satz 11.6 zeigt, dass f^{-1} stetig ist. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\Big)^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Also ist f^{-1} in y differenzierbar mit $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(a)}$. □

Beispiel 14.10. (a) Nach Satz 14.9 ist $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y} \qquad \text{für } y \in (0,\infty).$$

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = x^\alpha$. Dann ist $h = \exp \circ f$ mit $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha \log x$. Also ist h differenzierbar mit

$$h'(x) = \exp'(f(x))f'(x) = \exp(f(x))\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(c) Nach Satz 14.9 ist $\arcsin\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für } y \in (-1,1).\end{aligned}$$

Hier haben wir im dritten Schritt verwendet, dass $\arcsin y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und somit $\cos(\arcsin y) > 0$ für $y \in (-1,1)$ gilt.

Korollar 14.11. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $x \neq 0$. Sei $x_n := 1 + \frac{x}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x_n > 0$ für $n > -x$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Es folgt

$$1 \overset{\text{Beispiel 14.10}}{=} \log'(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n - \log 1}{x_n - 1} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

also

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$$

und damit

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion. □

Definition 14.12. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in D$ heißt

(a) *lokales Minimum* von f, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in D \cap U_\varepsilon(x)$.

(b) *striktes lokales Minimum* von f, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(y) > f(x)$ für alle $y \in D \cap U_\varepsilon(x)$, $y \neq x$.

(c) *lokales Maximum* von f, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in D \cap U_\varepsilon(x)$.

(d) *striktes lokales Maximum* von f, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(y) < f(x)$ für alle $y \in D \cap U_\varepsilon(x)$, $y \neq x$.

(e) *lokales Extremum* von f, wenn x ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.

Satz 14.13. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *und sei* $x \in (a, b)$ *ein lokales Extremum einer Funktion* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, *welche in* x *differenzierbar ist. Dann gilt* $f'(x) = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei x ein lokales Minimum von f. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ und $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Insbesondere ist

$$c_n := \frac{f(x + \frac{\varepsilon}{2n}) - f(x)}{\frac{\varepsilon}{2n}} \geq 0 \quad \text{und} \quad d_n := \frac{f(x - \frac{\varepsilon}{2n}) - f(x)}{-\frac{\varepsilon}{2n}} \leq 0 \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} c_n = f'(x) = \lim_{n\to\infty} d_n \leq 0,$$

also $f'(x) = 0$. □

Satz 14.14 (Mittelwertsatz)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *und* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, welche in* (a, b) *differenzierbar ist. Dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(*siehe Abb. 14.3*)*. Im Spezialfall* $f(a) = f(b)$ *existiert* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle).

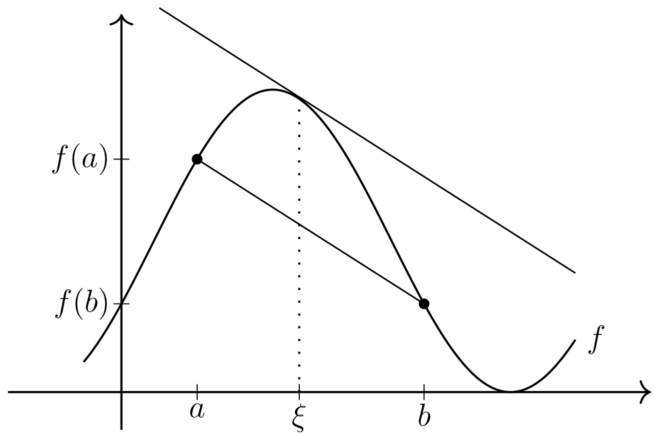

Abbildung 14.3.: Mittelwertsatz

Beweis. Sei $I := [a, b]$.

1. Spezialfall: Es gelte $f(a) = f(b)$. Nach Satz 11.1 existieren $x, y \in I$ mit $f(x) = \min f(I)$ und $f(y) = \max f(I)$.

Ist f nicht konstant, so gilt

$$f(x) < f(a) = f(b) \qquad \text{oder} \qquad f(y) > f(a) = f(b).$$

Im ersten Fall ist $x \in (a, b)$ und somit $f'(x) = 0$ nach Satz 14.13, im zweiten Fall ist $y \in (a, b)$ und $f'(y) = 0$. Ist schließlich f konstant, so ist $f' \equiv 0$ auf (a, b).

2. Allgemeiner Fall: Die Funktion

$$g\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

erfüllt $g(a) = g(b)$. Nach I. existiert also $\xi \in (a, b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Korollar 14.15. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $f'(x) \geq 0$ *für* $x \in (a, b)$ $\Leftrightarrow$ f *monoton wachsend*

(b) $f'(x) > 0$ *für* $x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f *streng monoton wachsend*

(c) $f'(x) \leq 0$ *für* $x \in (a, b)$ $\Leftrightarrow$ f *monoton fallend*

(d) $f'(x) < 0$ *für* $x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f *streng monoton fallend.*

(e) $f'(x) = 0$ *für* $x \in (a, b)$ $\Leftrightarrow$ f *konstant*

Beweis. Zuerst zu (b): Seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Nach Satz 14.14 und der Voraussetzung existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0$. Es folgt, dass f streng monoton wächst. Analog beweist man (d) sowie die Richtung „$\Rightarrow$“ von (a) und (c).

Nun zu (a) „$\Leftarrow$“: Sei f monoton wachsend, und sei $x \in (a, b)$. Dann ist $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ für $y \in I \setminus \{x\}$, also $f'(x) \geq 0$. Analog beweist man (c) „$\Leftarrow$“. Schließlich folgt (e) direkt aus (a) und (c). □

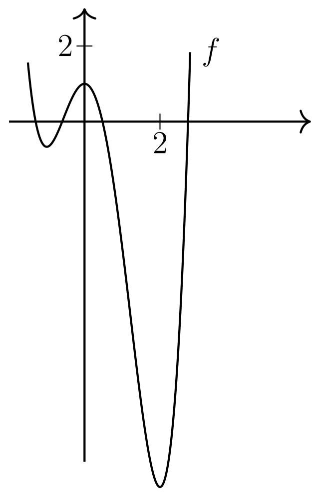

Abbildung 14.4.: Lokale Extrema

Bemerkung 14.16. (a) Die Umkehrungen von Korollar 14.15(b) und (d) gelten nicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

(b) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach Korollar 14.15 kann man am Vorzeichenverhalten von f' ablesen, welche Punkte als lokale Extrema von f in Frage kommen. Oft kann man so auch (im Falle der Existenz) die *globalen Extremwerte* $\min f := \min f(I)$ und $\max f := \max f(I)$ bestimmen.

Beispiel 14.17. (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 1$. Dann ist f differenzierbar nach Satz 14.4 (a)–(c), wobei

$$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 8x = 4x(x+1)(x-2) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1, \\ > 0 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ < 0 & \text{für } x \in (0, 2), \\ > 0 & \text{für } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Mit Korollar 14.15 folgt (siehe Abb. 14.4):

- -1 und 2 sind strikte lokale Minima von f.
- 0 ist ein striktes lokales Maximum von f.
- $\min_{\mathbb{R}} f = \min\{f(-1), f(2)\} = \min\{-\frac{2}{3}, -\frac{29}{3}\} = -\frac{29}{3}$.

(b) Seien $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$, d.h. man hat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (in diesem Fall nennt man p und q *konjugierte Exponenten*). Dann gilt die wichtige *Youngsche Ungleichung*

$$\text{(Y)} \qquad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{für } a, b \ge 0.$$

Un dies zu beweisen, halten wir $a > 0$ fest und definieren

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax - \frac{x^q}{q}.$$

Dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = a - x^{q-1} \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (0, a^{\frac{1}{q-1}}), \\ < 0 & \text{für } x \in (a^{\frac{1}{q-1}}, \infty). \end{cases}$$

Nach Korollar 14.15 ist f streng monoton wachsend in $(0, a^{\frac{1}{q-1}})$ und streng monoton fallend in $(a^{\frac{1}{q-1}}, \infty)$. Also nimmt f in $a^{\frac{1}{q-1}} = a^{\frac{p}{q}}$ ein globales Maximum an. Für alle $b \in [0,\infty)$ gilt also

$$ab - \frac{b^q}{q} = f(b) \leq f(a^{\frac{p}{q}}) = a^{\frac{p}{q}+1} - \frac{a^p}{q} = a^p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p}.$$

Da dies auch im Fall $a = 0$ gilt, folgt (Y).

Bemerkung 14.18. Die Funktion aus Beispiel 14.17(a) nimmt kein globales Maximum, die Funktion aus Beispiel 14.17(b) kein globales Minimum an. Dies lässt sich am *asymptotischen Verhalten* der Funktionen an den Rändern der Definitionsbereiche ablesen.

Satz und Definition 14.19. (a) *Die Funktion* $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *ist bijektiv und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion* Arcus Tangens $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist differenzierbar mit* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Die Funktion* $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ *ist bijektiv und streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion* $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$ *ist differenzierbar mit* $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

Zur Darstellung der Graphen dieser Funktionen siehe Abb. 14.5.

Beweis. **(a):** Gemäß Beispiel 14.7(b) ist tan stetig differenzierbar mit $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Also ist tan streng monoton wachsend gemäß Korollar 14.15 und somit injektiv. Des Weiteren gilt

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty,$$

und mit dem Zwischenwertsatz (oder direkt mit Satz 11.6) folgt die Surjektivität von tan. Ferner ist die Umkehrfunktion arctan gemäß Satz 14.9 differenzierbar mit

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

für $y \in \mathbb{R}$.

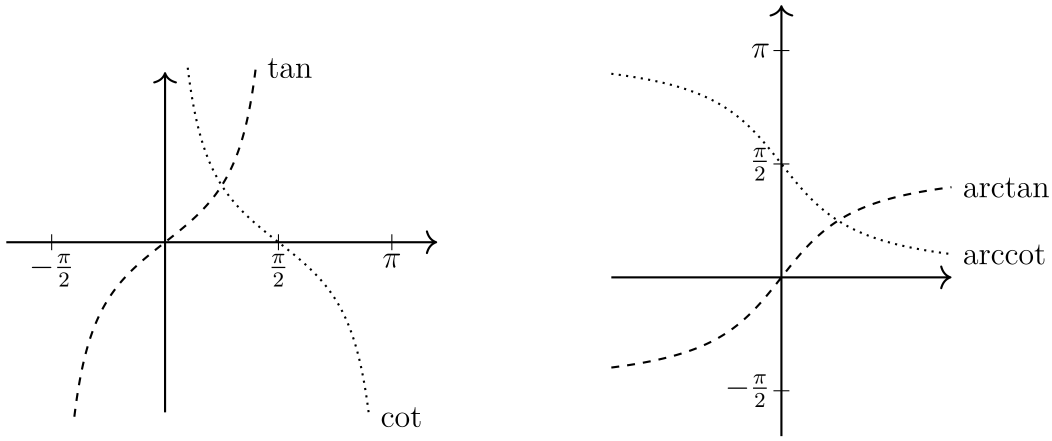

Abbildung 14.5.: tan, cot und ihre Umkehrfunktionen

(b): Für $x \in (0, \pi)$ gilt gemäß Korollar 12.5

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x - \frac{\pi}{2})} = -\tan(x - \frac{\pi}{2}).$$

Damit folgen die Aussagen über die Monotonie und Bijektivität von cot aus (a). Ferner folgt

$$\operatorname{arccot} y = \arctan(-y) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } y \in \mathbb{R},$$

also ist arccot auch differenzierbar, wobei nach Kettenregel

$$\operatorname{arccot}' y = -\arctan'(-y) = -\frac{1}{1+y^2} \qquad \text{für } y \in \mathbb{R}$$

gilt. □

Häufig kann man Grenzwerte von Quotienten des Typs „$\frac{\infty}{\infty}$“ oder „$\frac{0}{0}$“ mit dem folgenden Hilfsmittel berechnen:

Satz 14.20 (Regeln von de l'Hospital)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, und $f, g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Ferner habe g' in (a, b) keine Nullstelle. Es gelte entweder*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *oder*

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Dann folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{14.1}$$

falls der letzte Grenzwert im verallgemeinerten Sinn von Definition 13.6(c) *besteht. Ein entsprechendes Resultat gilt für die Grenzwerte, wenn $x \to b$.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes

Lemma 14.21 (2. Mittelwertsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und seien $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Beweis. Die Funktion

$$\tau \colon [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \tau(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$$

erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Rolle (siehe Satz 14.14); insbesondere ist $\tau(a) = \tau(b) = 0$. Also existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = \tau'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(\xi).$$

□

Beweis von Satz Satz 14.20. Wir beweisen (14.1) parallel unter einer der Annahmen (i) oder (ii), aber letztere nur für den Grenzwert $+\infty$. Der Fall $-\infty$ folgt, indem man $-g$ statt g betrachtet.

Weil g' keine Nullstelle hat, ist g in (a, b) wegen des Satzes von Rolle (Satz 14.14) injektiv und hat daher insbesondere höchstens eine Nullstelle. Indem wir b kleiner als diese mögliche Nullstelle wählen, können wir also annehmen, dass auch g keine Nullstelle besitzt und dass daher die Quotienten $f(x)/g(x)$ für $x \in (a, b)$ wohldefiniert sind.

Wenn $\mu := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty)$ gilt, dann seien μ_1, μ_2 beliebig mit $\mu_2 > \mu_1 > \mu$ gewählt. Es existiert dann $c \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \mu_1 \qquad \text{für alle } x \in (a, c) \tag{14.2}$$

gilt. Zu beliebigen $x, y \in (a, c)$ mit $x < y$ finden wir mit Lemma 14.21 ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \mu_1. \tag{14.3}$$

Unter der Bedingung (i) erhalten wir nach dem Grenzübergang $x \to a$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq \mu_1 \qquad \text{für alle } y \in (a, c).$$

Unter der Bedingung (ii), d.h. $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ nach unserer Bemerkung zu Beginn des Beweises, halten wir $y \in (a, c)$ fest und wählen $c_1 \in (a, y)$ so, dass

$$g(x) > \max\left\{1, g(y), \frac{|f(y) - \mu_1 g(y)|}{\mu_2 - \mu_1}\right\} \qquad \text{für alle } x \in (a, c_1)$$

gilt. Für ein solches x folgt aus (14.3) zunächst $f(y) - f(x) \geq \mu_1(g(y) - g(x))$ und schließlich
$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \mu_1 + \frac{|f(y) - \mu_1 g(y)|}{g(x)} < \mu_2.$$
Unter beiden Bedingungen haben wir also gezeigt:

$$\forall \mu_2 > \mu \; \exists c_1 \in (a,b) \; \forall x \in (a, c_1)\colon \frac{f(x)}{g(x)} < \mu_2. \tag{14.4}$$

Ist $\mu = -\infty$ so liefert dies (14.1).

Im Falle $\mu \in (-\infty, \infty]$ zeigt eine analoge Betrachtung:

$$\forall \mu_2 < \mu \; \exists c_1 \in (a,b) \; \forall x \in (a, c_1)\colon \frac{f(x)}{g(x)} > \mu_2. \tag{14.5}$$

Ist $\mu = \infty$ so liefert dies (14.1).

Für den Fall $\mu \in \mathbb{R}$ erhalten wir aus (14.4) und (14.5)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_1 \in (a,b) \; \forall x \in (a, c_1)\colon \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \mu\right| < \varepsilon,$$

indem wir einmal $\mu_2 \coloneqq \mu + \varepsilon$ und einmal $\mu_2 \coloneqq \mu - \varepsilon$ setzen. Somit haben wir (14.1) auch in diesem Fall gezeigt. $\square$

Bemerkung 14.22. Zusammen mit Satz 13.8 liefert Satz 14.20 auch die folgende Aussage: Seien $a < b$, $c \in (a,b)$, $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und g' besitze keine Nullstelle in (a,b). Ferner gelte entweder $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$. Dann folgt
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
falls der letzte Grenzwert im verallgemeinerten Sinn existiert.

Beispiel 14.23. (a) Gemäß Satz 14.20 gilt z.B.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\log x} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Anstelle von Beispiel 13.9(e) lässt sich nun mit Satz 14.20 auch direkt berechnen:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^\alpha \overset{\text{Beispiel 13.9(d)}}{=} 0$$

für $\alpha > 0$.

15. Das Riemann-Integral

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ fest gewählt und $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Bemerkung 15.1. Eine exemplarische Ausgangsfrage der Integrationstheorie ist: Für welche Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ kann man die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse sinnvoll definieren und berechnen? Dabei soll die Fläche über der x-Achse mit positiven Vorzeichen und die Fläche unter der x-Achse mit negativen Vorzeichen eingehen.

Naive Idee hierzu: Man zerlege I in kleine Teilintervalle und approximiere die gesuchte Fläche durch Rechtecke über diesen Teilintervallen.

Die Formalisierung dieser Idee, welche auf Darboux zurückgeht, führt auf das Riemann-Integral. Wir benötigen zunächst einige Definitionen. Ferner vereinbaren wir folgende praktische Schreibweisen: Ist M eine Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so schreiben wir

$$\sup_{x \in M} f(x) \quad \text{oder kurz} \quad \sup_M f \qquad \text{anstelle von} \quad \sup\{f(x) \mid x \in M\}$$

und analog für inf, max und min.

Definition 15.2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(a) f heißt *beschränkt*, falls $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt ist.

(b) Ist f beschränkt, so setzt man

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Diese Zahl nennt man die *Supremumsnorm* oder die ∞-*Norm* von f. Ferner setzt man für $M \subseteq D$:

$$\operatorname*{osc}_M f := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in M\} \qquad (\textit{Oszillation von } f \textit{ über } M),$$

siehe Abb. 15.1.

Bemerkung 15.3. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\operatorname*{osc}_M |f| \le \operatorname*{osc}_M f \le 2\|f\|_\infty \qquad \text{für } M \subseteq D.$$

Dies folgt, da

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| \le 2\|f\|_\infty \qquad \text{für } x, y \in D.$$

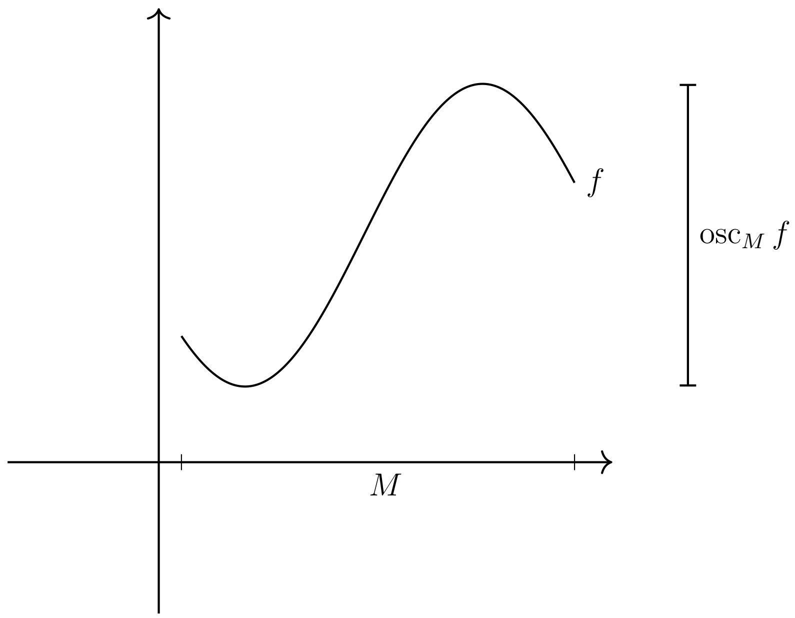

Abbildung 15.1.: Zur Oszillation einer Funktion

Ist ferner $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so ist

$$\|f\|_\infty = \max\Big\{|\sup_D f|, |\inf_D f|\Big\}$$

und

$$\operatorname*{osc}_M f = \sup_M f - \inf_M f \qquad \text{für } M \subseteq D.$$

Beweis. Leichte Übung! □

Erinnerung: Weiterhin betrachten wir $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ fest und $I = [a, b]$.

Definition 15.4. (a) Eine endliche Menge $Z \subseteq I$ mit $a, b \in Z$ heißt *Zerlegung von I*. Man schreibt $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Die Punkte x_i, $i = 0, \dots, n$ heißen *Teilpunkte* von Z. Die Zahl

$$\delta(Z) := \max_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$$

heißt *Feinheit von Z*.

(b) Sind Z, Z' Zerlegungen von I mit $Z \subseteq Z'$, so heißt Z' *Verfeinerung von Z*. Offensichtlich gilt dann $\delta(Z') \leq \delta(Z)$.

Beispiel 15.5 (Äquidistante Zerlegung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z_n := \left\{a + \frac{k}{n}(b-a) \;\middle|\; k = 0, \dots, n\right\}$ (*Zerlegung von I in n gleichgroße Intervalle*, siehe Abb. 15.2). Dann gilt

$$Z_m \supseteq Z_n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \text{ teilt } m$$

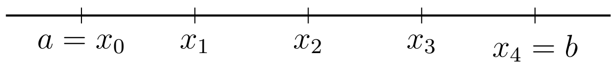

Abbildung 15.2.: Äquidistante Zerlegung

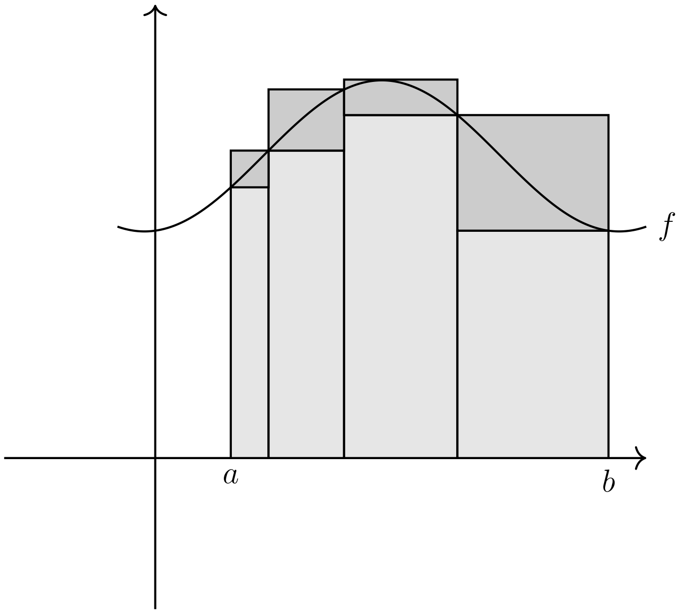

Abbildung 15.3.: Ober- und Untersumme

Ferner gilt

$$\delta(Z_n) = \frac{b-a}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Insbesondere gibt es Zerlegungen von I mit beliebig kleiner Feinheit.

Definition 15.6. Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von I. Sei ferner $I_k := [x_{k-1}, x_k] \subseteq I$ für $k = 1, \dots, n$. Dann heißt

(a) $U(f,Z) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{I_k} f$ *Untersumme von f zur Zerlegung Z;*

(b) $O(f,Z) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sup_{I_k} f$ *Obersumme von f zur Zerlegung Z* (siehe Abb. 15.3).

Beachte: Nach Bemerkung 15.3 ist

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f.$$

Beispiele 15.7. (a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = c$ für $x \in I$, d.h. f ist konstant. Dann ist

$$U(f,Z) = O(f,Z) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})c = (b-a)c$$

für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I.

(b) Sei speziell $I = [0, 1]$ und

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (\textit{Dirichletfunktion}).$$

Sei ferner $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung von I und $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\inf_{I_k} f = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{I_k} f = 1 \qquad \text{für } k = 1, \dots, n,$$

da jedes dieser Teilintervalle sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält. Es folgt $U(f, Z) = 0$ und $O(f, Z) = 1$.

Randbemerkung: Die Dirichletfunktion ist in keinem Punkt aus I stetig.

(c) Sei speziell $I = [0, 1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3$. Vorbemerkung: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man per Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{15.1}$$

Sei nun $Z_n := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k = 0, \dots, n \right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\inf f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{(k-1)^3}{n^3} \qquad \text{und} \qquad \sup f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{k^3}{n^3}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$, folgt

$$O(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{(15.1)}{=} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4}.$$

und

$$U(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \overset{(15.1)}{=} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(1-\frac{1}{n})^2}{4}.$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Hilfssatz 15.8. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt, und seien Z, Z' Zerlegungen von I. Dann gilt:*

(a) *$U(f, Z) \le O(f, Z')$.*

(b) *Ist Z' eine Verfeinerung von Z und $p := |Z' \setminus Z|$, so gilt*

$$U(f, Z) \le U(f, Z') \le U(f, Z) + 2p\|f\|_\infty \delta(Z) \tag{15.2}$$

und

$$O(f, Z) \ge O(f, Z') \ge O(f, Z) - 2p\|f\|_\infty \delta(Z). \tag{15.3}$$

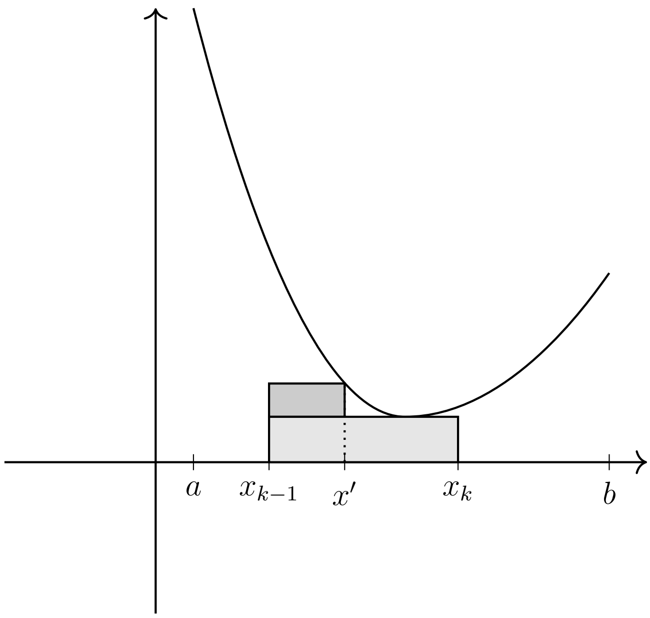

Abbildung 15.4.: Untersumme der Verfeinerung einer Zerlegung

Beweis. Zunächst zu (b): Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$, und ohne Einschränkung sei $Z' = Z \cup \{x'\}$ mit $x' \notin Z$, also $p = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann induktiv durch Hinzunahme weiterer Punkte.

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ der Index mit $x' \in (x_{k-1}, x_k)$, und sei

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \qquad I' := [x_{k-1}, x'] \qquad \text{und} \qquad I'' := [x', x_k].$$

Dann gilt (siehe Abb. 15.4)

$$\begin{aligned} U(f, Z') - U(f, Z) &= (x' - x_{k-1}) \inf_{I'} f + (x_k - x') \inf_{I''} f - (x_k - x_{k-1}) \inf_{I_k} f \\ &\geq [(x' - x_{k-1}) + (x_k - x') - (x_k - x_{k-1})] \inf_{I_k} f = 0. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} U(f, Z') - U(f, Z) &\leq (x' - x_{k-1}) \|f\|_\infty + (x_k - x') \|f\|_\infty + (x_k - x_{k-1}) \|f\|_\infty \\ &= 2(x_k - x_{k-1}) \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \delta(Z). \end{aligned}$$

Es folgt (15.2) für $p = 1$, und analog sieht man (15.3).

Zu (a): Sei $Y := Z \cup Z'$. Dann ist Y eine Verfeinerung von Z und von Z', also gilt

$$U(f, Z) \overset{\text{(b)}}{\leq} U(f, Y) \overset{\text{nach Def.}}{\leq} O(f, Y) \overset{\text{(b)}}{\leq} O(f, Z').$$

$\square$

Definition 15.9. Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(a) $\int_* f := \sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$ heißt *Unterintegral von f*.

$\int^* f := \inf\{O(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$ heißt *Oberintegral von f*.

Beachte: Wegen Hilfssatz 15.8(a) gilt stets $\int_* f \leq \int^* f$.

(b) f heißt *Riemann-integrierbar*, wenn $\int_* f = \int^* f$ gilt. In diesem Fall heißt $\int_I f := \int_* f = \int^* f$ das *Riemann-Integral* von f über I.

(c) Wir setzen $\mathcal{R}(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar}\}$.

Beispiel 15.10 (Fortsetzung von Beispiele 15.7)**.** (a) Ist f konstant, d.h. $f \equiv c$ auf I mit $c \in \mathbb{R}$, so ist $\int_* f = \int^* f = c(b-a)$ nach Beispiele 15.7(a), also $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $\int_I f = c(b-a)$.

(b) Sei $I = [0,1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ die Dirichletfunktion aus Beispiele 15.7(b). Dann ist $\int_* f = 0$ und $\int^* f = 1$, also $f \notin \mathcal{R}(I)$.

(c) Sei $I = [0,1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Nach Beispiele 15.7(c) ist

$$\int_* f \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{(1-\frac{1}{n})^2}{4} = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \int^* f \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4} = \frac{1}{4},$$

also $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $\int_I f = \frac{1}{4}$.

Satz 15.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{R}(I)$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I existiert mit $O(f,Z) - U(f,Z) \leq \varepsilon$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $f \in \mathcal{R}(I)$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$U(f,Z_1) \geq \int_* f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad O(f,Z_2) \leq \int^* f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit $Z := Z_1 \cup Z_2$ folgt

$$O(f,Z) - U(f,Z) \overset{\text{Hilfssatz 15.8(b)}}{\leq} O(f,Z_2) - U(f,Z_1) \leq \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$“: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung eine Zerlegung Z von I mit

$$\varepsilon \geq O(f,Z) - U(f,Z) \geq \int^* f - \int_* f$$

Dies zeigt $\int^* f \leq \int_* f$. Also gilt Gleichheit, und damit ist $f \in \mathcal{R}(I)$. $\square$

Satz 15.12. *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt und im offenen Teilintervall (a,b) stetig, so ist $f \in \mathcal{R}(I)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und seien $a', b' \in (a,b)$ mit

$$a' < b', \qquad a' - a < \frac{\varepsilon}{6\|f\|_\infty} \qquad \text{und} \qquad b - b' < \frac{\varepsilon}{6\|f\|_\infty}.$$

Nach Voraussetzung und Satz 11.1 ist f im Intervall $[a', b']$ gleichmäßig stetig, also existiert $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b' - a')} \qquad \text{für alle } x, y \in [a', b'] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Sei nun $Z' = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a', b']$ mit $\delta(Z') < \delta$, und sei $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann ist $Z := Z' \cup \{a, b\}$ eine Zerlegung von I, und mit $I_0 := [a, a']$ und $I_{n+1} := [b', b]$ gilt

$$\begin{aligned}
O(f, Z) - U(f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f + (a' - a) \operatorname*{osc}_{I_0} f + (b - b') \operatorname*{osc}_{I_{n+1}} f \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3(b' - a')} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) + 2(a' - a)\|f\|_\infty + 2(b - b')\|f\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit Satz 15.11. □

Satz 15.13. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{R}(I) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta > 0 \text{ so, dass für jede} \\ \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \delta(Z) < \delta \text{ gilt: } O(f, Z) - U(f, Z) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: folgt direkt aus Satz 15.11 und Beispiel 15.5.

„$\Rightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 15.11 existiert eine Zerlegung Z_0 mit $O(f, Z_0) - U(f, Z_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen $m := |Z_0|$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{8m\|f\|_\infty}$.

Sei Z eine Zerlegung von I mit $\delta(Z) < \delta$, und sei $Z' = Z \cup Z_0$ sowie $p := |Z' \setminus Z|$. Dann ist $p \leq m$, und mit Hilfssatz 15.8(b) folgt

$$\begin{aligned}
O(f, Z) - U(f, Z) &\leq O(f, Z') - U(f, Z') + 4\|f\|_\infty p\delta(Z) \\
&\leq O(f, Z_0) - U(f, Z_0) + 4\|f\|_\infty m\delta \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Satz und Definition 15.14 (Riemann-Summen)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkt, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{R}(I)$ mit $\int_I f = c$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

für jede Zerlegung $Z := \{x_0, \ldots, x_n\}$ von I mit $\delta(Z) < \delta$ und jede Wahl von Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, gilt:

$$\left| c - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \varepsilon. \tag{15.4}$$

Die Zahl $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ *heißt* Riemann-Summe zur Zerlegung Z und den Stützstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 15.13 existiert $\delta > 0$ so, dass $O(f,Z) - U(f,Z) \leq \varepsilon$ für jede Zerlegung von I mit $\delta(Z) < \delta$. Sei nun $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$ eine solche Zerlegung, und seien $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ beliebig gewählt. Da nach Voraussetzung

$$U(f,Z) \leq c \leq O(f,Z)$$

und, nach Definition von Ober- und Untersumme,

$$U(f,Z) \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq O(f,Z)$$

gilt, folgt

$$\Big| c - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \Big| \leq O(f,Z) - U(f,Z) \leq \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so gewählt, dass (15.4) erfüllt ist. Wir wählen eine Zerlegung $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$ von I mit $\delta(Z) < \delta$, setzen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ und wählen Punkte $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ mit

$$f(\xi_k) \geq \sup_{I_k} f - \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{und} \qquad f(\eta_k) \leq \inf_{I_k} f + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung

$$O(f,Z) \leq \sum_{k=1}^n \Big(f(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{b-a} \Big)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon \leq c + 2\varepsilon$$

und

$$U(f,Z) \geq \sum_{k=1}^n \Big(f(\eta_k) - \frac{\varepsilon}{b-a} \Big)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) - \varepsilon \geq c - 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$c - 2\varepsilon \leq U(f,Z) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq O(f,Z) \leq c + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\int_* f = \int^* f = c$, wie behauptet. $\square$

Satz 15.15. *Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *$\alpha f \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_I (\alpha f) = \alpha \int_I f$.*

(b) *$f + g \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.*

(c) *Ist $f \leq g$ in I (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$), so folgt $\int_I f \leq \int_I g$.*

(d) $|f| \in \mathcal{R}(I)$ *und* $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

(e) $fg \in \mathcal{R}(I)$.

Die Eigenschaften (a)–(c) *kann man wie folgt zusammenfassen: Die Menge* $\mathcal{R}(I)$ *ist ein* $\mathbb{R}$-*Vektorraum und das Riemann-Integral* $\int_I \colon \mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$ *ist ein lineares und monotones Funktional.*

Beweis. **(a) und (b):** Es reicht zu zeigen: $\alpha f + g \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_I (\alpha f + g) = \alpha \int_I f + \int_I g$.

Ohne Einschränkung sei $\alpha \neq 0$. Wir verwenden Satz und Definition 15.14. Sei also $\varepsilon > 0$, und sei $\delta > 0$ so gewählt, dass (15.4) für f mit $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ und für g mit $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist.

Sei nun $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung von I mit $\delta(Z) < \delta$, und seien $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\Big(\alpha \int_I f + \int_I g\Big) - \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha f(\xi_k) + g(\xi_k)\Big)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\qquad \leq \left|\alpha\Big(\int_I f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big)\right| + \left|\int_I g - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\qquad \leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also aus Satz und Definition 15.14.

(c): Dies folgt, da $U(f, Z) \leq U(g, Z)$ und $O(f, Z) \leq O(g, Z)$ für jede Zerlegung Z von I.

(d): Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung und Satz 15.11 existiert eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von I mit $O(f, Z) - U(f, Z) \leq \varepsilon$. Mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ gilt dann auch

$$\begin{aligned}
O(|f|, Z) - U(|f|, Z) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} |f| \\
&\overset{\text{Bemerkung 15.3}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f = O(f, Z) - U(f, Z) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit Satz 15.11 folgt also $|f| \in \mathcal{R}(I)$. Wegen $\pm f \leq |f|$ folgt aus (a) und (c) schließlich $\pm \int_I f = \int_I \pm f \leq \int_I |f|$, also $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

(e): Ohne Einschränkung sei $\|f\|_\infty \neq 0$ und $\|g\|_\infty \neq 0$, da andernfalls f oder g die konstante Nullfunktion ist, also auch fg. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren Zerlegungen Z', Z'' von I mit

$$O(f, Z') - U(f, Z') \leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty} \qquad \text{und} \qquad O(g, Z'') - U(g, Z'') \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$$

Sei $Z := Z' \cup Z'' = \{x_0, \dots, x_n\}$ und $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \dots, n$. Es folgt für $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{I_k} fg &= \sup_{x,y \in I_k} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\le \sup_{x,y \in I_k} \big(|f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|\big) \le \|f\|_\infty \operatorname*{osc}_{I_k} g + \|g\|_\infty \operatorname*{osc}_{I_k} f\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}O(fg, Z) - U(fg, Z) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} fg \\ &\le \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} g + \|g\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f \\ &= \|f\|_\infty \big(O(g, Z) - U(g, Z)\big) + \|g\|_\infty \big(O(f, Z) - U(f, Z)\big) \\ &\le \|f\|_\infty \big(O(g, Z'') - U(g, Z'')\big) + \|g\|_\infty \big(O(f, Z') - U(f, Z')\big) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit Satz 15.11 folgt die Behauptung. □

Korollar 15.16 (Standardabschätzung)**.** *Ist $f \in \mathcal{R}(I)$, so gilt $\left|\int_I f\right| \le \|f\|_\infty (b - a)$.*

Beweis. Sei $g \colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \|f\|_\infty$ für $x \in I$. Dann ist $g \in \mathcal{R}(I)$ und $|f| \le g$, also

$$\left|\int_I f\right| \overset{\text{Satz 15.15(d)}}{\le} \int_I |f| \overset{\text{Satz 15.15(c)}}{\le} \int_I g \overset{\text{Beispiel 15.10(a)}}{=} \|f\|_\infty (b - a). \qquad \square$$

Notation 15.17. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, so schreiben wir $\mathcal{R}(a, b)$ anstelle von $\mathcal{R}([a, b])$, und für $f \in \mathcal{R}(a, b)$ schreiben wir

$$\int_a^b f \quad \text{oder auch} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{anstelle von} \qquad \int_{[a,b]} f.$$

Ferner sei

$$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

und $\int_c^c f = 0$ für $c \in [a, b]$.

Satz 15.18 (Intervalladditivität)**.** *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f \colon [a, c] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt*

$$f \in \mathcal{R}(a, c) \qquad \Leftrightarrow \qquad f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}(a, b) \quad \text{und} \quad f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}(b, c),$$

und in diesem Fall ist $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Beweis. „⇒“: Es gelte $f \in \mathcal{R}(a,c)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 15.11 existiert eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,c]$ mit $O(f,Z) - U(f,Z) \le \varepsilon$. Ohne Einschränkung sei $b \in Z$, d.h. $b = x_m$ für ein $m \in \{1, \dots, n-1\}$ (ansonsten nimmt man b hinzu; dadurch wird $O(f,Z)$ nicht größer und $U(f,Z)$ nicht kleiner).

Setzt man $Z_1 := \{x_0, \dots, x_m\}$, $Z_2 := \{x_m, \dots, x_n\}$ und $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \dots, n$, so folgt

$$\begin{aligned} O(f|_{[a,b]}, Z_1) - U(f|_{[a,b]}, Z_1) &= \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f \\ &= O(f,Z) - U(f,Z) \le \varepsilon \end{aligned}$$

sowie (analog)

$$O(f|_{[b,c]}, Z_2) - U(f|_{[b,c]}, Z_2) = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \operatorname*{osc}_{I_k} f \le \varepsilon.$$

Mit Satz 15.11 folgt $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}(a,b)$ und $f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}(b,c)$.

„⇐“: Es gelte $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}(a,b)$ und $f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}(b,c)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 15.11 existieren Zerlegungen Z_1 von $[a,b]$ und Z_2 von $[b,c]$ mit

$$O(f|_{[a,b]}, Z_1) - U(f|_{[a,b]}, Z_1) \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad O(f|_{[b,c]}, Z_2) - U(f|_{[b,c]}, Z_2) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit der Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2$ von $[a,c]$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_* f &\ge U(f,Z) = U(f|_{[a,b]}, Z_1) + U(f|_{[b,c]}, Z_2) \\ &\ge O(f|_{[a,b]}, Z_1) + O(f|_{[b,c]}, Z_2) - \varepsilon \ge \int_a^b f + \int_b^c f - \varepsilon \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int^* f &\le O(f,Z) = O(f|_{[a,b]}, Z_1) + O(f|_{[b,c]}, Z_2) \\ &\le U(f|_{[a,b]}, Z_1) + U(f|_{[b,c]}, Z_2) + \varepsilon \le \int_a^b f + \int_b^c f + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\int_a^b f + \int_b^c f - \varepsilon \le \int_* f \le \int^* f \le \int_a^b f + \int_b^c f + \varepsilon.$$

Nach $\varepsilon \to 0$ folgt $f \in \mathcal{R}(a,c)$ und $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. □

Bemerkung 15.19. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I := [a,b]$. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$ von I gibt derart, dass f auf $I \setminus Z$ stetig ist und die Grenzwerte $\lim_{x \to x_k+} f(x)$, $\lim_{x \to x_k-} f(x)$, $k = 1, \dots, n-1$ sowie $\lim_{x \to a+} f(x)$ und $\lim_{x \to b-} f(x)$ existieren und endlich sind (siehe Abb. 15.5). In diesem Fall ist f beschränkt (wie man leicht sieht) und damit Riemann-integrierbar nach Satz 15.12 und Satz 15.18.

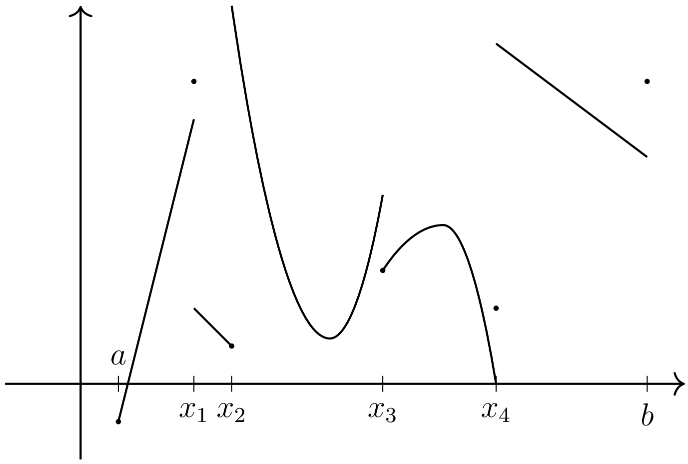

Abbildung 15.5.: Stückweise stetige Funktion

16. Integrale und Stammfunktionen

Bemerkung 16.1. Im Folgenden untersuchen wir, wie sich das Riemann-Integral unter Variation des zugrunde liegenden Intervalls verhält. Dies liefert uns einen Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation, welcher uns ermöglicht, für viele stetige Funktionen Integrale zu bestimmen.

Satz 16.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$ sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in \mathcal{R}(I)$ mit $g \geq 0$ in I. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Ist speziell $g \equiv 1$, so folgt

$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a).$$

Beweis. Da f stetig ist, existiert $m := \min_I f$ und $M := \max_I f$. Wegen $g \geq 0$ in I ist

$$mg \leq fg \leq Mg \qquad \text{auf } I,$$

also nach Satz 15.15(c) und (e):

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Somit existiert $c \in [m, M]$ mit $c \int_a^b g = \int_a^b fg$. Nach Korollar 11.3 ist $c \in f(I)$, d.h. es gibt $\xi \in I$ mit $c = f(\xi)$. Die Behauptung folgt. $\square$

Im Folgenden sei I stets ein beliebiges nicht entartetes Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition 16.3. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn $F' = f$ gilt.

Proposition 16.4. *Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F besitzt, so ist $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Stammfunktionen von f.*

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ gilt dann $(F+C)' = F' = f$, d.h. $F + C$ ist auch eine Stammfunktion von f. Sei andererseits G eine beliebige Stammfunktion von f. Dann folgt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ auf I. Da F und G außerdem in I stetig sind, liefert Korollar 14.15(e), dass $F - G$ konstant ist. $\square$

Satz 16.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.*

(a) *Für $a \in I$ sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Dann ist F ist eine Stammfunktion von f.

(b) *Seien $a, b \in I$ und $G\colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Wir schreiben $G\Big|_a^b$ anstelle von $G(b) - G(a)$.

Beweis. **(a):** Sei $x \in I$ und $(x_n)_n$ eine Folge in $I \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Satz 16.2 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen x und x_n derart, dass

$$F(x_n) - F(x) = \int_a^{x_n} f - \int_a^x f \overset{\text{Satz 15.18}}{=} \int_x^{x_n} f = f(\xi_n)(x_n - x)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ gilt und f in x stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x).$$

Somit ist F in x differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.

(b): Sei F die Stammfunktion von f aus (a). Mit Proposition 16.4 folgt dann

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$ □

Definition 16.6. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Mit $\int f$ bezeichnen wir eine unspezifische Stammfunktion von f, das *unbestimmte Integral* von f. Damit ist eine Stammfunktion gemeint, die aber nur bis auf die Addition einer Konstante festgelegt ist.

Bemerkung 16.7. Nach Satz 16.5(b) dienen die Unbestimmten Integrale der Berechnung von *bestimmten Integralen*, d.h. Integralen mit festgelegten Grenzen. Bei der Verwendung unbestimmter Integrale kann man aus $\int f = F$ und $\int f = G$ nicht schließen, dass $F = G$ gilt. Man kann lediglich $F - G \equiv$ konst. folgern.

Die Schreibweise $F = \int f$ ist äquivalent zu $F' = f$. Das unbestimmte Integral einer Funktion zu bilden ist also in diesem Sinne die Umkehrung der Differentiation.

Beispiel 16.8. (a) Nach Beispiel 14.5 und Beispiel 14.10(b) gilt

$$\int x^s \,\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}, \qquad \text{falls} \quad \begin{cases} s \in \mathbb{N}_0, \text{ *oder*} \\ s \in \mathbb{Z},\ s \leq -2 \text{ und für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ und für } x > 0. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| \qquad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

nach Beispiel 14.10(a). Man beachte dazu: Auf $(-\infty, 0)$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

(b) Gemäß Satz und Definition 14.19(a) ist $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x$.

(c) Gemäß Beispiel 14.10(c) gilt für in $(-1,1)$: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x$.

Satz 16.9 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g \in C^1(I)$ und $a, b \in I$. Dann gelten*

$$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' \qquad \textit{und} \qquad \int f'g = fg - \int fg'.$$

Beweis. Die Tatsache $(fg)' = f'g + fg'$ ist äquivalent zu $fg = \int (f'g + fg') = \int f'g + \int fg'$. Nach Voraussetzung ist $f'g + fg' \colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Die erste Behauptung folgt also aus Satz 16.5(b). $\square$

Beispiel 16.10. In $(0, \infty)$ ist

$$\int \log x\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log x}_{g}\,\mathrm{d}x = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\log x - x.$$

Satz 16.11 (Substitutionsregel)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \colon [a,b] \to I$ stetig differenzierbar sowie $f \colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Beweis. Sei $F \colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f (diese existiert nach Satz 16.5(a)). Dann ist $F \circ \varphi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Kettenregel eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(f \circ \varphi)\varphi' \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Also liefert Satz 16.5(b)

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f. \qquad \square$$

Bemerkung 16.12. Praktische Anwendung der Substitutionsregel, falls $\varphi \colon [a,b] \to [c,d]$ bijektiv ist (wie meistens der Fall):

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} x &= \varphi(y) \\ y &= \varphi^{-1}(x) \\ \mathrm{d}x &= \varphi'(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \right| = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y$$

oder auch umgekehrt, falls φ' keine Nullstellen besitzt:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ x &= \varphi^{-1}(y) \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \right| = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{f(y)}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}\,\mathrm{d}y.$$

Wendet man die Substitutionsregel auf unbestimmte Integrale an, so muss man nach der Integration die Substitution rückgängig machen und die erhaltene Stammfunktion zur Probe differenzieren.

Beispiel 16.13. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Seien $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

$$\int_a^b f(ct+d)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{aligned} x &= ct + d \\ t &= \frac{x}{c} - \frac{d}{c} \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{c}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| = \frac{1}{c} \int_{ca+d}^{cb+d} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle stetigen Funktionen $f\colon [\min\{ca+d, cb+d\}, \max\{ca+d, cb+d\}] \to \mathbb{R}$. Hier haben wir also mit einer *affin linearen Transformation* substituiert.

(b) Sei $\varphi\colon [a,b] \to (0,\infty)$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ \mathrm{d}y &= \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \log y = \log(\varphi(x)).$$

Konkretes Beispiel: Mit $\varphi(x) = x^2 + 1$ ist

$$\int_a^b \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\varphi(x))\Big|_a^b = \log\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \log\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

(c) Mit (b) und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \arctan x\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{g}\,\mathrm{d}x &= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1). \end{aligned}$$

(d) Auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist sin bijektiv und stetig differenzierbar und $\cos \geq 0$. Es folgt

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} x &= \sin t \\ \mathrm{d}x &= \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{aligned} y &= 2t \\ \mathrm{d}y &= 2\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin y\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Dies entspricht dem Flächeninhalt des Halbkreises mit Radius eins.

Für die Bestimmung von Stammfunktionen rationaler Funktionen überführen wir diese in eine einfacher integrierbare Form:

Bemerkung 16.14 (Partialbruchzerlegung)**.** Seien P, Q reelle, teilerfremde Polynome, sei $N_Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, die Menge aller reellen Nullstellen von Q und sei $R\colon \mathbb{R} \setminus N_Q \to \mathbb{R}$ die durch $R := P/Q$ gegebene rationale Funktion. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ gilt (sonst Zählergrad durch Polynomdivision reduzieren).

Es existieren $m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $k_\nu, \ell_\mu \in \mathbb{N}$ sowie $b_\mu, c_\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_m x + c_m)^{\ell_m}.$$

Hier seien die quadratischen Polynome paarweise verschieden und ohne reelle Nullstellen. Ferner existieren Zahlen $A_{\nu,k}, B_{\mu,\ell}, C_{\mu,\ell} \in \mathbb{R}$ und eine Darstellung

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{A_{\nu,1}}{(x - x_\nu)} + \dots \frac{A_{\nu,k_\nu}}{(x - x_\nu)^{k_\nu}} \right) \\ & + \sum_{\mu=1}^{m} \left(\frac{B_{\mu,1} x + C_{\mu,1}}{(x^2 + b_\mu x + c_\mu)} + \dots + \frac{B_{\mu,\ell_\mu} x + C_{\mu,\ell_\mu}}{(x^2 + b_\mu x + c_\mu)^{\ell_\mu}} \right), \end{aligned} \tag{16.1}$$

die *Partialbruchzerlegung von R.*

Die Stammfunktionen der rationalen Funktionen der Form $\frac{A}{(x-a)^k}$ erhält man dann mit Hilfe von Beispiel 16.8(a) und Beispiel 16.13(a). Die rationalen Funktionen der Form $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\ell}$ integriert man nach einer quadratischen Ergänzung und einer Substitution im Falle $\ell = 1$ direkt (siehe Beispiel 16.13(b)). Im Fall $\ell \geq 2$ gilt eine Rekursionsformel, siehe Merkblatt zur Integration.

Beispiel 16.15. Wir betrachten

$$R(x) \coloneqq \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x - 26}{x^4 + 2x^2 - 8x + 5}.$$

Für den Nenner $Q(x) \coloneqq x^4 + 2x^2 - 8x + 5$ finden wir durch Ausprobieren und mit Abspalten von Lineartermen mittels Polynomdivision $Q(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 5)$. Wegen $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$ hat Q keine weiteren reellen Nullstellen. Wir machen also den Ansatz

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}. \tag{16.2}$$

Multiplikation mit $(x-1)^2$ liefert

$$R(x)(x-1)^2 = \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x - 26}{x^2 + 2x + 5} = A(x-1) + B + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}(x-1)^2.$$

Einsetzen von 1 für x liefert $B = -3$. Schließlich setzen wir in (16.2) nacheinander 0, -1 und 2 für x ein und erhalten aus dem resultierenden linearen Gleichungssystem $A = 2$, $C = 1$ und $D = -1$, also

$$R(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+5}. \tag{16.3}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ x = 2y-1 \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}y \end{array}\right| \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) - \arctan y \\ &= \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Also folgt aus (16.3)

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = 2\log|x-1| + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Probe!

Definition 16.16 (uneigentliche Riemann-Integrale)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ die Randpunkte des Intervalls I, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ist $a \in I$, $b \notin I$ und $f|_{[a,y]} \in \mathcal{R}(a, y)$ für alle $y \in I$, $y > a$, so setzt man

$$\int_a^b f := \lim_{y\to b}\int_a^y f,$$

falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

(b) Ist $b \in I$, $a \notin I$ und $f|_{[y,b]} \in \mathcal{R}(y, b)$ für alle $y \in I$, $y < b$, so setzt man

$$\int_a^b f := \lim_{y\to a}\int_y^b f,$$

falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

(c) Es gelte $a, b \notin I$, und es sei $f|_{[y,z]} \in \mathcal{R}(y, z)$ für alle $y, z \in I$, $y < z$. Dann setzt man

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f,$$

falls die Integrale auf der rechten Seite für ein $c \in I$ im Sinne von (a) und (b) in $\mathbb{R}$ existieren. Man sieht leicht mit Satz 15.18 (Intervalladditivität), dass diese Integrale dann auch für jede Wahl von $c \in I$ existieren, und dass die Summe unabhängig von c ist.

Beispiel 16.17. (a) Für $s > -1$ existiert

$$\int_0^1 t^s \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^s \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{s+1}(1-\varepsilon^{s+1}) = \frac{1}{s+1},$$

Für $s \le -1$ existiert $\int_0^1 t^s \,\mathrm{d}t$ nicht.

(b) Für $s < -1$ existiert

$$\int_1^\infty t^s \,\mathrm{d}t = \lim_{y\to\infty}\int_1^y t^s \,\mathrm{d}t = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{s+1}(y^{s+1}-1) = -\frac{1}{s+1},$$

Für $s \ge -1$ existiert $\int_1^\infty t^s \,\mathrm{d}t$ nicht.

(c) Das uneigentliche Intergal $\int_0^\infty t^s \,\mathrm{d}t$ existiert für kein $s \in \mathbb{R}$ wegen (a) und (b).

Satz 16.18 (Majorantenkriterium)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ die Randpunkte des Intervalls I, und seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $|f| \le g$ auf I. Dann gilt: Existiert das uneigenliche Integral $\int_a^b g$, so auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f$.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $I = [a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln.

Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $[a, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, und seien

$$c_n := \int_a^{x_n} f, \qquad d_n := \int_a^{x_n} g.$$

Nach Voraussetzung existiert dann

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \int_a^\infty g.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|c_n - c_m| = \left|\int_{x_m}^{x_n} f\right| \le \int_{x_m}^{x_n} g = |d_n - d_m|, \qquad \text{falls } x_m \le x_n,$$

und

$$|c_n - c_m| = |c_m - c_n| = \left|\int_{x_n}^{x_m} f\right| \le \int_{x_n}^{x_m} g = |d_n - d_m|, \qquad \text{falls } x_n \le x_m.$$

Somit ist $(c_n)_n$ eine Cauchyfolge, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f = \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{existiert.} \tag{16.4}$$

Ist $(y_n)_n$ eine weitere Folge in $[a, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, so kann man das obige Argument auf die „gemischte Folge“ $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ anwenden. Dies liefert die Unabhängigkeit des Grenzwertes in (16.4) von der gewählten Folge $(x_n)_n$, und somit existiert

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f.$$

□

Satz und Definition 16.19. *Für $x > 0$ existiert das uneigentliche Integral*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Dabei gilt

(a) $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *für* $x > 0$.

Die Funktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Gamma(x)$ *heißt Gammafunktion.*

Beweis. Sei $x > 0$. Da $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ nach Beispiel 13.9(c) gilt, existiert ein $t_0 > 0$ mit

$$0 < t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq \frac{1}{t^2} \qquad \text{für } t \geq t_0.$$

Mit Beispiel 16.17(b) und Satz 16.18 folgt die Existenz von

$$\int_{t_0}^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Da ferner $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq t^{x-1}$ für $t > 0$ gilt, existiert

$$\int_0^{t_0} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{nach Beispiel 16.17(a) und Satz 16.18.}$$

Insgesamt folgt die Existenz von $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Nun zu (b): Für $0 < r < s < \infty$ gilt mit partieller Integration:

$$\int_r^s t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x\mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=r}^{t=s} + x\int_r^s t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Da $\lim_{t\to\infty} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0 = \lim_{t\to 0} t^x\mathrm{e}^{-t}$, folgt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Zu (a): Induktiv erhält man aus (b) für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 1\Gamma(1),$$

wobei

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to\infty}(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^y = 1 - \lim_{y\to\infty}\mathrm{e}^{-y} = 1.$$

Es folgt somit $\Gamma(n+1) = n!$. □

Satz 16.20 (Integralkriterium zur Reihenkonvergenz)**.** *Ist $f\colon [c,\infty) \to [0,\infty)$ eine monoton fallende und stetige Funktion für ein $c \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=c}^\infty f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_c^\infty f$ existiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f(k) \le f(t) \le f(k-1) \qquad \text{für } k \ge c+1 \text{ und } t \in [k-1,k],$$

also folgt

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f \le f(k-1) \qquad \text{für } k \ge c+1.$$

Summation ergibt

$$\sum_{k=c+1}^{N} f(k) \le \int_{c}^{N} f \le \sum_{k=c}^{N-1} f(k) \qquad \text{für } N \in \mathbb{N}, N \ge c+1. \tag{16.5}$$

Da f nichtnegativ ist, ist die Funktion $y \mapsto \int_c^y f$ monoton wachsend und es folgt:

$$\sum_{k=c}^{\infty} f(k) \quad \text{konvergiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N\ge c}} \sum_{k=c}^{N} f(k) < \infty \qquad \overset{(16.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\sup_{y \ge c} \int_c^y f < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_c^\infty f = \lim_{y\to\infty} \int_c^y f \quad \text{existiert (in } \mathbb{R}). \qquad \square$$

Beispiel 16.21. Sei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Nach Beispiel 16.17(b) und Satz 16.20 konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty k^s$ genau dann, wenn $s < -1$ ist. Dieses Ergebnis hatten wir bereits in Beispiel 7.12(c) angekündigt.

(b) Man kann mit Hilfe von Satz 16.20 zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\log k)^s}$ genau dann konvergiert, wenn $s > 1$ ist.

17. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Definition 17.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Induktiv definieren wir für $n \in \mathbb{N}$: Eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt *n-mal differenzierbar*, wenn f differenzierbar und die Ableitung f' $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Wir definieren dann die *n-te Ableitung* $f^{(n)} \colon D \to \mathbb{R}$ ebenfalls induktiv durch $f^{(0)} := f$ und $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Spezielle Bezeichnungen: f'', f''' anstelle von $f^{(2)}$ bzw. $f^{(3)}$.

(b) Wir setzen

$$C^n(D) := \left\{ f \colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar und } f^{(n)} \text{ ist stetig} \right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $C^\infty(D) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(D)$. Die Funktionen in $C^n(D)$ heißen *n-mal stetig differenzierbar*, die Funktionen in $C^\infty(D)$ heißen *beliebig oft differenzierbar*. Es gilt offensichtlich

$$C^0(D) \supseteq C^1(D) \supseteq C^2(D) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(D),$$

wobei $C^0(D) = \left\{ f \colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ stetig} \right\}$ sei.

Beispiel 17.2. (a) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, und

$$\exp^{(n)}(x) = \exp x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

(b) $\log \in C^\infty((0,\infty))$, und

$$\log^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} \qquad \text{für } x > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

(Beweis: Leichte Induktion).

Im Folgenden sei I stets ein beliebiges nicht entartetes Intervall in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 17.3. Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f heißt *konvex*, wenn

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in I \text{ und alle } \lambda \in [0,1] \text{ gilt.}$$

f heißt *konkav*, falls $-f$ konvex ist.

Geometrische Interpretation:

- f konvex $\Rightarrow$ Die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten aus Graph f liegt stets oberhalb von Graph f.
- f konkav $\Rightarrow$ Die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten aus Graph f liegt stets unterhalb von Graph f.

(b) Ist f differenzierbar, so gilt

$$f \text{ konvex} \qquad \Leftrightarrow \qquad f' \text{ monoton wachsend.}$$

(c) Sei nun f zweimal differenzierbar. Dann folgt mit Korollar 14.15(a):

$$f \text{ konvex} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'' \geq 0 \text{ in } I,$$

also auch

$$f \text{ konkav} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'' \leq 0 \text{ in } I.$$

Die Punkte aus I, bei denen f'' das Vorzeichen wechselt, nennt man *Wendepunkte von f*.

Beispiel 17.4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Dann ist

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \begin{cases} > 0 & \text{für } |x| > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ < 0 & \text{für } |x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Also sind $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ die Wendepunkte von f. Ferner sind die Einschränkungen $f|_{\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]}$ und $f|_{\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)}$ konvex, und $f|_{\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]}$ ist konkav.

Bemerkung 17.5 (und Definition)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I)$ und $a \in I$.

(a) Es existiert genau ein Polynom T_n vom Grad kleiner gleich n mit reellen Koeffizienten und

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad \text{für } k = 0, \dots, n.$$

Dieses ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

(Beweis als Übung). Man nennt T_n das *n-te Taylorpolynom von f im Punkt a*.

Der nächste Satz gibt Auskunft darüber, wie gut eine Funktion f in der Nähe von a durch ihr n-tes Taylorpolynom approximiert wird.

(b) Das erste Taylorpolynom $x \mapsto T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ ist eine affin lineare Funktion, deren Graph die Tangente an f im Punkt a darstellt.

(c) Spezielles Beispiel: Sei $f = \log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $a := 1$. Dann ist

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Definition 17.6. (a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir sagen, dass ∞ $(-\infty)$ *ein Häufungspunkt von D ist*, falls D nach oben (unten) unbeschränkt ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir den Limes Superior (Inferior) von $f(x)$ für $x \to a$ durch

$$\limsup_{x\to a} f(x) \coloneqq \sup\Big\{\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \;\Big|\; (x_n) \subseteq D \setminus \{a\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a\Big\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

bzw.

$$\liminf_{x\to a} f(x) \coloneqq \inf\Big\{\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \;\Big|\; (x_n) \subseteq D \setminus \{a\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a\Big\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

(c) Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{C}$, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir Limes Superior und Inferior von $f(z)$ für $z \to a$ genauso wie in (b).

Definition 17.7 (Landau-Symbole)**.** Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen.

(a) $f(z) = o(g(z))$ (*gesprochen: $f(z)$ ist klein-O von $g(z)$*) *für $z \to a$*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in U_\delta(a) \cap D\colon |f(z)| \le \varepsilon |g(z)|.$$

(b) $f(z) = O(g(z))$ (*gesprochen: $f(z)$ ist groß-O von $g(z)$*) *für $z \to a$*, falls gilt:

$$\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in U_\delta(a) \cap D\colon |f(z)| \le C |g(z)|.$$

(c) Für $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a = \pm\infty$ ein Häufungspunkt von D gelten analoge Definitionen.

Bemerkung 17.8. Falls in der Situation von Definition 17.7 $g(z) \neq 0$ ist für z nahe bei a ($a \in \mathbb{R}$) bzw. $|z|$ groß genug ($a = \pm\infty$), so ist $f(z) = o(g(z))$ für $z \to a$ äquivalent zu $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$, und $f(z) = O(g(z))$ für $z \to a$ ist äquivalent zu $\limsup_{z\to a} \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < \infty$.

Satz 17.9 (Satz von Taylor)**.** *Sei $f \in C^n(I)$ und $a \in I$. Für $x \in I$ schreiben wir $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ mit*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{und} \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Dann gilt $R_n(x) = o((x-a)^n)$ für $x \to a$, also

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{17.1}$$

Ist zudem $f \in C^{n+1}(I)$, so gilt für $x \in I$:

(a) $R_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t$ (Taylorsche Form des Restglieds)

(b) *Es gibt $\xi \in [\min\{a,x\}, \max\{a,x\}]$ mit*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{(Lagrangesche Form des Restglieds),}$$

und $R_n(x) = O((x-a)^{n+1})$ für $x \to a$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (a) per Induktion.

„$n = 0$“: Sei $f \in C^1(I)$. Für $x \in I$ gilt nach dem Hauptsatz (Satz 16.5)

$$R_0(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

„$n-1 \Rightarrow n$“: Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x \in I$. Mit der Induktionsannahme und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= -f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

also

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Nun zu (b): Nach (a) und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung Satz 16.2 existiert ein $\xi \in [\min\{a,x\}, \max\{a,x\}]$ mit

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = -f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{t=a}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Da $f^{(n+1)}$ stetig ist, gilt $\limsup_{x\to a}|f^{(n+1)}(\xi)| < \infty$. Aus der vorangehenden Rechnung folgt also $R_n(x) = O((x-a)^{n+1})$ für $x \to a$.

Schließlich zu (17.1): Sei $\varepsilon > 0$, und sei $\delta > 0$ mit

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| < \varepsilon \qquad \text{für } x \in U_\delta := U_\delta(a) \cap I.$$

Für $x \in U_\delta \setminus \{a\}$ existiert nach (b) — angewandt auf R_{n-1} — ein $\xi \in U_\delta$ mit

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

also

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}\right| \leq \frac{|f^n(\xi) - f^{(n)}(a)|}{n!} < \frac{\varepsilon}{n!} \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 17.10. Sei $f \in C^n(I)$ und $a \in I$. In Ergänzung zu Satz 17.9 kann man folgendes zeigen: Ist T ein Polynom vom Grad kleiner gleich n mit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

so muss T bereits das n-te Taylorpolynom von f in a sein.

Korollar 17.11. *Die Zahl* e *ist irrational.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $2 < \mathrm{e} < 3$ gilt (s. Bemerkung 7.22). Angenommen, es wäre $\mathrm{e} = \frac{p}{n}$ mit $p, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Anwendung von Satz 17.9(b) auf $f = \exp$, $a = 0$ und $x = 1$ liefert ein $\xi \in [0, 1]$ mit

$$0 < \underbrace{e}_{f(1)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{T_n(1)} = R_n(1) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Multiplikation mit $n!$ ergibt

$$0 < p\,(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{Z}} < \frac{3}{n+1} \leq 1.$$

Da $p\,(n-1)! - \sum \frac{n!}{k!}$ eine ganze Zahl ist, ergibt sich ein Widerspruch. □

Satz 17.12. *Seien $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^n((a-\varepsilon, a+\varepsilon))$ derart, dass*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dann gilt:

(a) *Ist n gerade, so ist*
- *a ein striktes lokales Minimum von f, falls $f^{(n)}(a) > 0$;*
- *a ein striktes lokales Maximum von f, falls $f^{(n)}(a) < 0$;*

(b) *Ist n ungerade, so ist a kein lokales Extremum von f.*

Beweis. Sei $I := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Die Voraussetzung liefert

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

also

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n \underbrace{\Big(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{R_n}{(x-a)^n}\Big)}_{:=g(x)} \qquad \text{für } x \in I \setminus \{a\}.$$

Nach (17.1) existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \qquad \text{für } x \in U_\delta \setminus \{a\},$$

wobei $U_\delta := U_\delta(a) \cap I$ sei. Also hat $g(x)$ für $x \in U_\delta \setminus \{a\}$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$. Somit ergeben sich für gerades n die Implikationen

- $f^{(n)}(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(a)$ für $x \in U_\delta \setminus \{a\}$;
- $f^{(n)}(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a)$ für $x \in U_\delta \setminus \{a\}$.

Ist n ungerade, so wechselt die Funktion $x \mapsto (x-a)^n$ das Vorzeichen bei a, also ist a kein lokales Extremum von f. $\square$

Beispiel 17.13. Sei wiederum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Dann ist

$$f'(x) = 4x(x^2-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \{0, \pm 1\}$$

und

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

also $f''(-1) = f''(1) = 8$ und $f''(0) = -4$. Also sind ± 1 nach Satz 17.12 strikte lokale Minima von f, und 0 ist ein striktes lokales Maximum von f.

18. Konvergenz von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition 18.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

- *punktweise konvergent gegen f*, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ für alle $z \in D$ gilt.
- *gleichmäßig konvergent gegen f*, wenn $f_n - f$ für fast alle n beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$ gilt.

Bemerkung 18.2 (und Beispiele)**.** (a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, und seien $f, f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Funktionen. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f, so auch punktweise, denn für alle $z \in D$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z) - f(z)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

(b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht; sei z.B. $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $f_n(x) = x^n$. Sei ferner $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{falls } x = 1; \end{cases}$$

Nach Definition konvergiert die Folge $(f_n)_n$ punktweise gegen f. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, da

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die punktweise Grenzfunktion f ist auch nicht stetig, obwohl alle Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}_0$ stetig sind. Der folgende Satz 18.3 zeigt, dass dies bei gleichmäßiger Konvergenz nicht passieren kann.

(c) Ist $r \in (0,1)$ fest gewählt und $g_n\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $g_n(x) = x^n$, so konvergiert die Folge $(g_n)_n$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[0,r]$, da

$$\|g_n - 0\|_\infty = \|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,r]} |x^n| = r^n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \text{ gilt.}$$

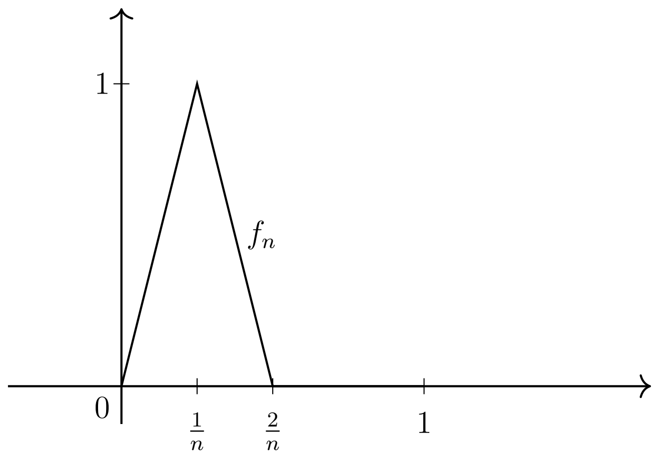

Abbildung 18.1.: Folge stetiger Funktionen

(d) Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 2} \subseteq C([0,1])$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2 - nx, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

siehe Abb. 18.1. Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen die (stetige) Nullfunktion, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_n := \frac{1}{n}$ gilt nämlich $\|f_n - 0\|_\infty \geq |f_n(x_n) - 0| = |1 - 0| = 1$. Gleichmäßige Konvergenz ist bei einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen mit stetiger Grenzfunktion also nicht notwendig.

Satz 18.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, und sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{C}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } n \geq N.$$

Da f_N stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|f_N(z) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } z \in U_\delta(a) \cap D$$

Für $z \in U_\delta(a) \cap D$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(z) - f_N(a)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f stetig in a. $\square$

Definition 18.4. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, seien $f, f_n \colon D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Funktionen, und sei $g_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \colon D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt

- *punktweise konvergent gegen f*, wenn die Folge $(g_n)_n$ punktweise gegen f konvergiert.
- *gleichmäßig konvergent gegen f*, wenn die Folge $(g_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 18.5 (Konvergenzkriterium von Weierstraß)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n \colon D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Funktionen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{C}$. Ist ferner f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist auch f stetig.*

Beweis. Für $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|f_n(z)| \leq \|f_n\|_\infty$, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ absolut nach Voraussetzung und dem Majorantenkriterium Satz 7.11. Wir definieren daher $f \colon D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty =: d_n.$$

Also folgt $\|f - \sum_{k=0}^{n} f_k\|_\infty \leq d_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ nach Voraussetzung gilt. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen f. Sind alle f_k stetig, so auch $\sum_{k=0}^{n} f_k$ für alle n. Nach Satz 18.3 ist also auch f stetig. □

Definition 18.6. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$, und sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Der formale Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ heißt *Potenzreihe mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt ζ*. Mit $\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ definieren wir den *Konvergenzradius* r der Potenzreihe durch

$$r := \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0,\infty); \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0; \\ 0, & \text{falls } \rho = \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 18.7. Gilt in Definition 18.6 $a_n \neq 0$ für fast alle n und existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, so gilt nach Blatt 6, Aufg. 17:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

In dieser Darstellung lässt sich r oft leichter berechnen.

Beispiel 18.8. (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n$ den Konvergenzradius $r = 1$, da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \right)^\alpha = 1.$$

(b) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$, da nach Bemerkung 18.7

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Satz 18.9 (zur Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Sei $\zeta \in \mathbb{C}$, und sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Seien ferner ρ und r wie in Definition 18.6 definiert. Dann gilt:*

(a) *Ist $z \in U_r(\zeta)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ absolut.*

(b) *Für jedes $s \in [0, r)$ ist die Reihe der Funktionen $f_n \colon B_s(\zeta) \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n(z-\zeta)^n$ gleichmäßig konvergent. Man sagt kurz: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$* konvergiert lokal gleichmäßig in $U_r(\zeta)$.

(c) *Die Funktion $f \colon U_r(\zeta) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ ist stetig.*

(d) *Ist $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(\zeta)$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$.*

Beweis. Im Beweis von (a)–(c) sei ohne Einschränkung $\rho < \infty$, denn im Fall $\rho = \infty$ ist $r = 0$ und damit $U_r(\zeta) = \varnothing$.

(a): Für $z \in U_r(\zeta)$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-\zeta)^n|} = \rho|z-\zeta| < 1,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ absolut nach dem Wurzelkriterium Satz 7.18.

(b): Sei $s \in [0, r)$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{\|f_n|_{B_s(\zeta)}\|_\infty} = \sqrt[n]{\sup_{z\in B_s(\zeta)} |a_n(z-\zeta)^n|} \leq s\sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n|_{B_s(\zeta)}\|_\infty} \leq s\rho < 1$ nach Voraussetzung, und das Wurzelkriterium liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n|_{B_s(\zeta)}\|_\infty$. Nach Satz 18.5 konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_{B_s(\zeta)}$ also gleichmäßig, und

$$\text{die Funktion} \quad B_s(\zeta) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n, \text{ ist stetig.} \tag{18.1}$$

(c): Sei $z \in U_r(\zeta)$. Dann existiert $s \in [0, r)$ mit $z \in U_s(\zeta) \subseteq B_s(\zeta)$. Da die Einschränkung von f auf $B_s(\zeta)$ nach (18.1) stetig ist, folgt auch die Stetigkeit von f in z.

(d): Ohne Einschränkung sei $\rho > 0$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(\zeta)$ gilt

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z-\zeta)^n|} = \begin{cases} \rho|z-\zeta| > 1, & \text{falls } \rho < \infty; \\ \infty, & \text{falls } \rho = \infty. \end{cases}$$

Also divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ nach Bemerkung 7.20. $\square$

Bemerkung 18.10. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $\zeta \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius r. Ist $r \in (0,\infty)$, so kann man im Allgemeinen nicht sagen, für welche Punkte auf der Kreislinie $S_r(\zeta) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\zeta| = r\}$ die Potenzreihe konvergiert. Dies wird an folgenden drei Beispielen deutlich (jeweils mit $\zeta = 0$):

- Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$ und divergiert in jedem Punkt $z \in S_1(0)$, da die Summanden keine Nullfolge bilden.
- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ hat gemäß Beispiel 18.8(a) den Konvergenzradius $r = 1$. Für jedes $z \in S_1(0)$ konvergiert die Reihe absolut, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ hat ebenfalls gemäß Beispiel 18.8(a) den Konvergenzradius $r = 1$. Sie ist divergent in $z = 1$ (harmonische Reihe). Für $z \in S_1(0) \setminus \{1\}$ ist die Reihe jedoch konvergent nach Satz 7.16.

Definition 18.11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $\xi \in D$ und $f \in C^\infty(D)$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

heißt *Taylorreihe* von f in ξ.

Beispiel 18.12. (a) Die Funktion $\log \in C^\infty(0,\infty)$ erfüllt

$$\log^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad \text{für } x \in (0,\infty).$$

Insbesondere ist die Taylorreihe von log im Punkt $\xi = 1$ gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

(b) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ und $b \in C^\infty((-1,\infty))$ gegeben durch

$$b(x) = (1+x)^\gamma.$$

Für $x > -1$ gilt dann

$$b'(x) = \gamma(1+x)^{\gamma-1}, \quad b''(x) = \gamma(\gamma-1)(1+x)^{\gamma-2},$$
$$\text{also induktiv} \quad b^{(n)}(x) = \gamma(\gamma-1)\cdot\dots\cdot(\gamma-n+1)(1+x)^{\gamma-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Taylorreihe von b in 0 ist also gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma}{n} x^n \qquad \text{mit} \qquad \binom{\gamma}{n} := \prod_{j=1}^{n} \frac{\gamma-j+1}{j}. \tag{18.2}$$

Diese Notation erweitert die Definition der Binomialkoeffizienten aus Definition 3.23 auf reelle Zahlen γ. Man beachte: Ist $\gamma \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{\gamma}{n} = 0$ für $n \geq \gamma + 1$, da dann das Produkt im Zähler den Faktor 0 enthält. Die Reihe in (18.2) heißt *binomische Reihe*.

Bemerkung 18.13. Satz 18.9 erlaubt uns, den Konvergenzbereich der Taylorreihe einer gegebenen C^∞-Funktion f in einem Entwicklungspunkt einzugrenzen. Im Allgemeinen muss diese Reihe aber innerhalb des Konvergenzbereichs nicht notwendig gegen f konvergieren, wie folgendes Beispiel zeigt. Betrachte

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (siehe z.B. O. Forster, Analysis 1, 9. Auflage, Beispiel (22.2)). Also verschwindet die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 identisch (und konvergiert somit auf ganz $\mathbb{R}$ gegen 0). Da ferner $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, stimmt f in keiner Umgebung von 0 mit der Taylorreihe überein.

Der folgende Satz gibt uns ein hinreichendes Kriterium für die Darstellbarkeit einer C^∞-Funktion durch ihre Taylorreihe.

Satz 18.14 (von Bernstein)**.** *Sei $\xi \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $f \in C^\infty(\xi - r, \xi + r)$ eine Funktion, welche eine der folgenden Eigenschaften hat:*

(i) *Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$f^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \text{für alle } n \geq N,\ x \in (\xi - r, \xi + r).$$

(ii) *Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \text{für alle } n \geq N,\ x \in (\xi - r, \xi + r).$$

Dann konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt ξ in allen Punkten aus $(\xi - r, \xi + r)$ gegen f.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\xi = 0$ (ansonsten betrachte die Funktion $x \mapsto f(x + \xi)$). Für $x \in (-r, r)$ gilt dann nach dem Satz von Taylor Satz 17.9(a)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{ und } \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \,\mathrm{d}t$$

Durch Substitution $t = sx$ erhält man die Darstellung

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(sx)(1 - s)^n \,\mathrm{d}s$$

Zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in (-r, r). \tag{18.3}$$

Sei zuerst (i) angenommen, und sei $x \in (0, r)$ sowie $y \in (x, r)$. Dann gilt

$$(**) \qquad T_{n+1}(y) \geq T_n(y) \qquad \text{und} \qquad 0 \leq R_{n+1}(y) \leq R_n(y) \qquad \text{für } n \geq N.$$

Da zudem $f^{(n+1)}$ für $n \geq N$ auf $(-r, r)$ monoton wächst, folgt

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 \underbrace{f^{(n+1)}(sx)}_{\leq f^{(n+1)}(sy)} (1-s)^n \, \mathrm{d}s \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \overset{(**)}{\leq} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_N(y).$$

Wegen $\frac{x}{y} \in (0, 1)$ folgt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Da $f^{(n+1)}$ nichtnegativ und monoton wachsend ist, gilt auch

$$|R_n(-x)| = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 \underbrace{f^{(n+1)}(-sx)}_{\leq f^{(n+1)}(sx)} (1-s)^n \, \mathrm{d}s \leq R_n(x) \qquad \text{für } n \geq N,$$

und somit $\lim_{n\to\infty} R_n(-x) = 0$. Insgesamt folgt (18.3).

Erfüllt f Eigenschaft (ii), so betrachte $g \in C^\infty(-r, r)$, definiert durch $g(x) = f(-x)$. Dann ist

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x) \geq 0 \qquad \text{für } x \in (-r, r) \text{ und } n \geq N$$

nach Voraussetzung. Somit folgt mit dem ersten Fall angewandt auf g,

$$g(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{für } x \in (-r, r),$$

also auch

$$f(x) = g(-x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (-x)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{für } x \in (-r, r),$$

wie behauptet. □

Beispiel 18.15 (Fortsetzung von Beispiel 18.12)**.** (a) Die Funktion $-\log \in C^\infty(0, \infty)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 18.14(ii) mit $\xi = 1$, $r = 1$ und $N = 1$. Also gilt

$$\log(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \qquad \text{für } x \in (0, 2).$$

(b) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ und $b \in C^\infty(-1, \infty)$, $b(x) = (1+x)^\gamma$. Dann erfüllt, abhängig vom Wert von γ, entweder b oder $-b$ die Voraussetzungen von Satz 18.14(ii) mit $\xi = 0$, $r = 1$ und $N > \gamma$. Also gilt

$$(1+x)^\gamma = \sum_{k=0}^\infty \binom{\gamma}{k} x^k \qquad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Allgemeiner als in Satz 18.14 sagen wir, wenn für $f\colon U_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ eine Darstellung als Potenzreihe existiert, dass *f in ζ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann.*

Im Folgenden untersuchen wir die Frage, wie sich Integration und Differentiation mit gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen verträgt.

Satz 18.16. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Nach Korollar 15.16 gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \|f_n - f\|_\infty (b-a) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.\end{aligned}$$

□

Satz 18.17. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, und sei $(f_n)_n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt $\xi \in I$ gegen eine Zahl in $\mathbb{R}$ konvergiert, und derart, dass die Folge $(f_n')_n$ gleichmäßig konvergiert. Dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, so dass $f_n \to f$ punktweise in I und $f_n' \to f'$ für $n \to \infty$. Ist I kompakt, dann ist auch die Konvergenz $f_n \to f$ gleichmäßig.*

Beweis. Seien $\eta := \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$ und $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Für $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach dem Hauptsatz

$$f_n(x) = f_n(\xi) + \int_\xi^x f_n',$$

wobei

$$\int_\xi^x f_n' \to \int_\xi^x g \qquad \text{für } n \to \infty \text{ nach Satz 18.16.}$$

Wir setzen

$$f(x) := \eta + \int_\xi^x g \qquad \text{für } x \in I.$$

Es folgt, dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$. Nach dem Hauptsatz ist $f \in C^1(I)$ mit $f' = g$. Ist I kompakt mit Länge $|I|$, dann gilt für $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f_n(x)| \le |\eta - f_n(\xi)| + \left|\int_\xi^x (g - f_n')\right| \le |\eta - f_n(\xi)| + \|g - f_n'\|_\infty |I|,$$

also $\|f - f_n\|_\infty \le |\eta - f_n(\xi)| + \|g - f_n'\|_\infty |I| \to 0$ für $n \to \infty$. □

Beispiel 18.18. Im Allgemeinen überträgt sich die Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen nicht auf die Folge der Ableitungen. Betrachte z.B. für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx).$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0, denn es gilt $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$ (wobei hier 0 die konstante Nullfunktion bezeichne). Die Folge der Ableitungen

$$f_n' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = \cos(nx).$$

konvergiert allerdings nicht einmal punktweise gegen 0.

Potenzreihen kann man aber „summandenweise" differenzieren, wie der folgende Satz zeigt.

Korollar 18.19. *Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-\xi)^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, Entwicklungspunkt $\xi \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$. Dann gilt:*

(a) *Die „abgeleitete" Potenzreihe*

$$\sum_{n=1}^\infty n a_n (x-\xi)^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} (x-\xi)^n \tag{18.4}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius r.

(b) *Ist $r > 0$, so ist die Funktion $f \colon (\xi - r, \xi + r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-\xi)^n$ stetig differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x-\xi)^{n-1} \qquad \text{für } x \in (\xi - r, \xi + r).$$

Beweis. **(a):** Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty n a_n (x-\xi)^n$ hat ebenso wie $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-\xi)^n$ den Konvergenzradius r, da

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(b): Sei $s \in (0, r)$. Für die Funktionen

$$f_n \in C^1([\xi - s, \xi + s]), \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-\xi)^k$$

gilt

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x-\xi)^{k-1}, \qquad x \in [\xi - s, \xi + s].$$

Nach (a) und Satz 18.9(b) konvergiert die Funktionenfolge $(f_n')_n$ gleichmäßig gegen

$$g \colon [\xi - s, \xi + s] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x-\xi)^{n-1}.$$

Da zudem $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in [\xi - s, \xi + s]$, ist $f|_{[\xi-s,\xi+s]}$ nach Satz 18.17 stetig differenzierbar mit Ableitung g. Da $s \in (0, r)$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 18.20. *Unter den Voraussetzungen von Korollar 18.19 ist f sogar beliebig oft differenzierbar, und es gilt:*

(a) $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) a_k (x-\xi)^{k-n}$ *für* $x \in (\xi - r, \xi + r)$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$ *für* $n \in \mathbb{N}_0$.

Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k$ *die Taylorreihe von* f *in* a.

Beweis. Wiederholte Anwendung von Korollar 18.19 zeigt $f \in C^\infty(\xi - r, \xi + r)$ und (a). (b) folgt direkt aus (a). □

Korollar 18.20 zeigt die Eindeutigkeit von Potenzreihenentwicklungen: Lässt sich eine C^∞-Funktion in der Umgebung eines Punktes in $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe darstellen, so muss diese Reihe die Taylorreihe von f sein.

Beispiel 18.21. (a) Wir wollen mit Hilfe von Korollar 18.19 die Taylorreihe von $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt 0 bestimmen. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Es liegt nahe anzunehmen, dass die „integrierte“ Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{18.5}$$

eine Stammfunktion von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ in $(-1, 1)$ ist. Der Konvergenzradius der Potenzreihe in (18.5) ist 1. Nach Korollar 18.19 ist also $g' = \arctan'$ auf $(-1, 1)$. Da ferner $g(0) = 0 = \arctan(0)$ gilt, folgt

$$\arctan(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Diese Taylorreihe konvergiert sogar für $x = \pm 1$ nach dem Leibnizkriterium Satz 7.16. Für $|x| > 1$ divergiert die Taylorreihe, während die Funktion arctan auch dort definiert ist.

(b) Ableitung der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

nach x in $(-1, 1)$ liefert

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

und somit einen zweiten Weg, um Aufgabe 18.(c) vom Übungsblatt 6 zu lösen.

Der nächste Satz erweitert die Eindeutigkeitsaussage von Korollar 18.20 auf komplexe Potenzreihen.

Satz 18.22 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *komplexe Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Werte in einer Nullfolge* $(z_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *übereinstimmen. Dann gilt* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir setzen $f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Wegen der Stetigkeit von f_0 und g_0 in 0 folgt

$$a_0 = f_0(0) = \lim_{n\to\infty} f_0(z_n) = \lim_{n\to\infty} g_0(z_n) = g_0(0) = b_0.$$

Wir setzen

$$f_1(z) := \begin{cases} \frac{f_0(z)-a_0}{z}, & z \neq 0, \\ a_1, & z = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g_1(z) := \begin{cases} \frac{g_0(z)-b_0}{z}, & z \neq 0, \\ b_1, & z = 0. \end{cases}$$

Dann sind f_1 und g_1 wieder Summen von Potenzreihen in 0, deren Werte in (z_n) übereinstimmen. Sie haben dieselben positiven Konvergenzradien wie die Reihen von f_0 und g_0. Wie vorher gilt also $a_1 = b_1$. Induktiv folgt demnach $a_n = b_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. □

Bemerkung 18.23 (Verknüpfung von Potenzreihen). Wir betrachten jetzt Kombinationen zweier komplexer Potenzreihen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit Konvergenzradien $r_f, r_g > 0$.

(a) Da Linearkombinationen konvergenter Folgen (von Partialsummen) wieder konvergent sind, konvergieren auch für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ absolut, und zwar mindestens in $U_r(0)$, mit $r := \min\{r_f, r_b\} > 0$. Diese Reihen haben also einen positiven Konvergenzradius größer oder gleich r (er kann strikt größer sein) und haben λf bzw. $f + g$ als Grenzfunktionen.

(b) Das Cauchyprodukt (Satz 9.2) zeigt, dass auch

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

für $|z| < r$ konvergiert und dass somit fg in 0 in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelt werden kann.

Für die Komposition von Potenzreihen benötigen wir eine Verallgemeinerung von Produktreihen:

Definition 18.24 (Doppelreihe). Eine *Doppelfolge* $(a_{k\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ (entsprechendes gilt für andere Indexmengen). Mit einer solchen Doppelfolge heißt der formale Ausdruck $\sum_{k,\ell \in \mathbb{N}_0} a_{k\ell}$ *Doppelreihe*. Eine solche Doppelreihe heißt *summierbar*, falls gilt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{0 \le k,\ell \le n} |a_{k\ell}| < \infty.$$

Ferner heißen $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}$ die *k-te Zeilenreihe* und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\ell}$ die *ℓ-te Spaltenreihe*. Sind diese letzten Reihen immer konvergent, so heißen $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}$ die *Reihe der Zeilensummen* und $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\ell}$ die *Reihe der Spaltensummen.*

Satz 18.25 (Doppelreihensatz)**.** (a) *Sei $\sum_{k,\ell\in\mathbb{N}_0} a_{k\ell}$ eine summierbare Doppelreihe. Dann sind die Zeilen- und Spaltenreihen sowie die Reihen der Zeilen- und Spaltensummen absolut konvergent. Ferner existiert eine Zahl $s \in \mathbb{C}$, die* Summe der Doppelreihe, *so dass für jede Abzählung φ von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konvergiert absolut und*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\ell}. \tag{18.6}$$

(b) *Die Doppelreihe $\sum_{k,\ell\in\mathbb{N}_0} a_{k\ell}$ ist summierbar, falls eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:*

(i) *Es gibt eine Abzählung φ von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{\varphi(k)}| < \infty$;*

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}|a_{k\ell}| < \infty$*;*

(iii) $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{k\ell}| < \infty$*.*

Beweis. **(a):** Sei $M := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{0\le k,\ell\le n}|a_{k\ell}|$. Für eine Abzählung φ von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $\sum_{k=0}^{n}|a_{\varphi(k)}| \le M$. Nach Satz 7.5 konvergiert also $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut, und der Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz (Satz 7.28) unabhängig von der Wahl der Abzählung. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{\ell=0}^{n}|a_{k\ell}| \le M$, d.h. die Zeilenreihen konvergieren absolut. Ferner gilt für $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{\ell=0}^{n} a_{k\ell}\right| \le \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}|a_{k\ell}| \le M.$$

Nach $n \to \infty$ liefert dies für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}\right| \le M,$$

und somit konvergiert die Reihe der Zeilensummen absolut. Die absolute Konvergenz der Spaltenreihen und der Reihe der Spaltensummen folgt analog.

Um (18.6) zu zeigen seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei ferner $K \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass

$$\{\varphi(k) \mid k = 0, 1, \ldots, N\} \subseteq \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}_0,\ i, j \le K\}$$

gilt. Es folgt für $m, n \geq K$

$$\left|\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} a_{k\ell} - \sum_{k=0}^{N} a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|.$$

Nach $n \to \infty$ und $m \to \infty$ folgt hieraus

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} - s\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} - \sum_{k=0}^{N} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{k=0}^{N} a_{\varphi(k)} - s\right| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \leq \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, haben wir (18.6) für die Reihe der Zeilensummen gezeigt. Der Beweis für die Reihe der Spaltensummen ist analog.

(b): Im Fall (i) sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\{(k,\ell) \mid 0 \leq k, \ell \leq n\} \subseteq \{\varphi(k) \mid 0 \leq k \leq N\}$$

gilt. Es folgt

$$\sum_{0 \leq k,\ell \leq n} |a_{k\ell}| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|,$$

also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{0 \leq k,\ell \leq n} |a_{k\ell}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < \infty.$$

Im Fall (ii) gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{0 \leq k,\ell \leq n} |a_{k\ell}| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} |a_{k\ell}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{k\ell}| < \infty.$$

Der Fall (iii) geht analog. □

Satz 18.26 (Komposition von Potenzreihen). *Seien* $f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *komplexe Potenzreihen mit Konvergenzradien* $r_f, r_g > 0$. *Ferner gelte* $|a_0| = |f(0)| < r_g$. *Dann kann* $g \circ f$ *in* 0 *in eine Potenzreihe entwickelt werden mit mindestens dem positiven Konvergenzradius* $\sup\{\rho > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < r_g\}$.

Beweis. Sei $F\colon U_{r_f}(0) \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$. Dann folgt $F(0) = |a_0| < r_g$. Wegen der Stetigkeit von F existiert $\rho > 0$ mit $F(\rho) < r_g$. Für $|z| \leq \rho$ ist dann $f(z) \in U_{r_g}(0)$. Somit ist $h(z) \coloneqq g(f(z))$ dort wohldefiniert, und es gilt

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell\right)^k.$$

Die iterative Anwendung des Cauchyproduktes für $|z| < r_f$ zeigt (siehe Bemerkung 18.23(b)), dass Koeffizienten $c_\ell^k \in \mathbb{C}$ und $\gamma_\ell^k \in [0, \infty)$ existieren mit

$$(f(z))^k = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell\right)^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell^k z^\ell \qquad \text{und} \qquad (F(z))^k = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_\ell| z^\ell\right)^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_\ell^k z^\ell.$$

Es gilt dabei $|c_\ell^k| \le \gamma_\ell^k$, also für z mit $|z| \le \rho$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}|b_k c_\ell^k z^\ell| \le \sum_{k=0}^{\infty}|b_k|\sum_{\ell=0}^{\infty}\gamma_\ell^k \rho^\ell = \sum_{k=0}^{\infty}|b_k|(F(\rho))^k < \infty.$$

Die Doppelreihe $\sum_{k,\ell\in\mathbb{N}_0} b_k c_\ell^k z^\ell$ ist also nach dem Doppelreihensatz summierbar, und mit ebendiesem Satz folgt

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell^k z^\ell\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} b_k c_\ell^k z^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_\ell^k\right) z^\ell.$$

Dies zeigt, dass h die Grenzfunktion einer Potenzreihe in 0 mit Konvergenzradius größer als ρ ist. $\square$

Korollar 18.27. *Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, und sei $a_0 \neq 0$. Dann kann $\frac{1}{f}$ in 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden mit mindestens dem positiven Konvergenzradius* $\sup\{\rho > 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\rho^n < |a_0|\}$.

Beweis. Wir setzen

$$f^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{und} \qquad g(z) := \frac{1}{a_0 + z} = \frac{1}{a_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{a_0}\right)^n.$$

Dann hat die Potenzreihe für g den Konvergenzradius $|a_0|$ und Satz 18.26 für $\frac{1}{f} = g \circ f^*$ liefert das Resultat. $\square$

Bemerkung 18.28 (und Beispiel)**.** Die Koeffizienten, die sich aus Satz 18.26 und Korollar 18.27 ergeben, kann man oft am einfachsten mit Hilfe des Identitätssatzes für Potenzreihen berechnen. Dadurch lassen sich manche Grenzwerte einfacher als mit de l'Hospital (im reellen Fall) bestimmen.

(a) Für die Inverse folgt zum Beispiel aus $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit dem Cauchyprodukt

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell c_{k-\ell}\right) z^k.$$

Der *Koeffizientenvergleich* für die Potenzreihen links und rechts außen liefert ein unendliches Gleichungssystem, aus dem man sukzessive die Zahlen c_k berechnen kann:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 c_0 \\ 0 &= a_0 c_1 + a_1 c_0 \\ 0 &= a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(b) Für die Komposition im Fall $f(0) = 0$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gilt zum Beispiel nach Einsetzen für $z \to 0$

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= b_0 + b_1(a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3)) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + O(z^3))^2 + O(z^3) \\ &= b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + O(z^3), \end{aligned}$$

so dass sich hier die ersten drei Koeffizienten direkt ablesen lassen. Für höhere Koeffizienten muss man dementsprechend mehr Reihenglieder explizit mitführen.

(c) Um $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ zu berechnen, verwenden wir Beispiel 18.15(a) und Beispiel 18.21(a): Für $x \to 0$ gilt

$$\frac{\arctan x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{3} + O(x^4) \qquad \text{und} \qquad \log(1+x) = x + O(x^2),$$

also

$$\frac{3}{x^2} \log\left(\frac{\arctan x}{x}\right) = \frac{3}{x^2} \log\left(1 + \left(\frac{\arctan x}{x} - 1\right)\right) = \frac{3}{x^2}\left(-\frac{x^2}{3} + O(x^4)\right) \to -1.$$

Die Stetigkeit der Exponentialfunktion liefert

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{3}{x^2} \log\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Der nächste Satz zeigt, dass die Taylorreihe für den Arcus Tangens aus Beispiel 18.21(a) in -1 und 1 auch mit arctan übereinstimmt.

Satz 18.29 (Grenzwertsatz von Abel)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, Entwicklungspunkt $\zeta \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $r \in (0,\infty)$, die auch im Punkt $z = \zeta + r$ konvergent sei. Dann gilt:*

(a) *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n$ konvergiert gleichmäßig im Intervall $[\zeta, \zeta + r]$.*

(b) *Die Funktion $f\colon [\zeta, \zeta + r] \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n$ ist stetig, insbesondere gilt $\lim_{\substack{x\to\zeta+r \\ x<\zeta+r}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.*

Eine analoge Aussage gilt, falls die Reihe im Punkt $z = a - r$ konvergent ist.

Beweis. **(a):** Ohne Einschränkung sei $\zeta = 0$ und $r = 1$. Anwendung dieses Spezialfalls auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_n = a_n r^n$ liefert dann das allgemeine Resultat.

Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$r_m\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad r_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n.$$

Zu zeigen ist

$$\lim_{m\to\infty} \|r_m\|_\infty = 0. \tag{18.7}$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig, und sei

$$s_{m,n} := \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{für } m, n \in \mathbb{N},\ n \geq m.$$

Da nach Voraussetzung die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(**) \qquad\qquad |s_{m,n}| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq m \geq N.$$

Für $m \geq N$ und $x \in [0, 1)$ gilt nun

$$r_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (s_{m,n} - s_{m,n-1})x^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} s_{m,n}x^n - \sum_{n=m}^{\infty} s_{m,n}x^{n+1},$$

denn die Potenzreihen auf der rechten Seite konvergieren für $x \in [0, 1)$ wegen $(**)$. Da $s_{m,m} = 0$, folgt nun

$$|r_m(x)| = \left|(1-x) \sum_{n=m+1}^{\infty} s_{m,n}x^n\right| \leq \varepsilon(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \varepsilon \qquad \text{für } m \geq N,\ x \in [0, 1).$$

Ferner gilt für $m \geq N$ auch $|r_m(1)| = \lim_{n\to\infty}|s_{m,n}| \leq \varepsilon$, insgesamt also $\|r_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

Es folgt (18.7) und damit (a).

(b) folgt aus (a) und Satz 18.3. □

Beispiel 18.30. (a) Wie schon in Beispiel 18.21 bemerkt, konvergiert die Arcustangensreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

in $x = \pm 1$. Daher sind die Voraussetzungen von Satz 18.29 mit $\zeta = 0$ und $z = 1$ erfüllt, und es folgt insbesondere die Summenformel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x\to 1-} \arctan x \overset{\text{Beispiel 18.21}}{=} \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \overset{\text{Satz 18.29}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(b) Für die Taylorreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

des Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 sind die Voraussetzungen von Satz 18.29 mit $\zeta = 1$ und $r = 1$ erfüllt, da die (sich für $x = 2 = \zeta + r$ ergebende) Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

nach dem Leibnizkriterium konvergiert. Folglich gilt die Summenformel

$$\log(2) = \lim_{x\to 2-} \log x \overset{\text{Beispiel 18.15}}{=} \lim_{x\to 2-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \overset{\text{Satz 18.29}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Teil II.

Analysis 2

19. Normen und Skalarprodukte

Im Folgenden sei V stets ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (z.B. $V = \mathbb{R}^N$) und $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Wir benötigen einen Längen- bzw. Größenbegriff für Vektoren aus V, welcher nützliche Rechenregeln erfüllen soll.

Definition 19.1. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ derart, dass für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0.$ (*Definitheit*)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (*Homogenität*)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*).

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum.*

Beispiel 19.2. (a) Die Abbildung $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung $|\cdot|_\infty\colon \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $|x|_\infty := \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$, ist eine Norm auf $\mathbb{R}^N$.

(c) Auf dem Vektorraum $C(I)$ der stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}$ ist die Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} |f(t)|$. Diese ist wohldefiniert, weil jedes $f \in C(I)$ beschränkt ist.

Beweis. **(b):** Zur Definitheit: Für $x \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|x|_\infty = 0 \iff \forall i\colon |x_i| = 0 \iff x = 0.$$

Zur Homogenität: Für $x \in \mathbb{R}^N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$|\lambda x|_\infty = \max_i |\lambda x_i| = |\lambda| \max_i |x_i| = |\lambda| |x|_\infty.$$

Zur Dreiecksungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|x + y|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = |x|_\infty + |y|_\infty.$$

Beweis von (c) ähnlich. □

Definition 19.3. Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Für $x \in \mathbb{R}^N$ sei

$$|x|_p := \Big(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (p\text{-}Norm\ von\ x).$$

(b) Für $f \in C(I)$ sei

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad\qquad (p\text{-Norm von } f).$$

Satz 19.4. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann sind die Abbildungen $|\cdot|_p\colon \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ und $\|\cdot\|_p\colon C(I) \to [0,\infty)$ definit und homogen im Sinne von Definition 19.1.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|x|_p = 0 \iff |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = 0 \iff \forall i\colon x_i = 0 \iff x = 0$$

sowie

$$|\lambda x|_p^p = \sum_{i=1}^N |\lambda x_i|^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^N |x_i|^p = (|\lambda|\,|x|_p)^p,$$

also $|\lambda x|_p = |\lambda|\,|x|_p$.

Sei jetzt $f \in C(I)$. Ist $f = 0$, d.h. $f(t) = 0$ für alle $t \in I$, so folgt $\|f\|_p = 0$. Ist umgekehrt $f \neq 0$, so existiert $t_0 \in I$ mit $f(t_0) \neq 0$, d.h. $c := |f(t_0)|^p > 0$. Da die Funktion $t \mapsto |f(t)|^p$ stetig ist, existiert ferner $\delta > 0$ mit $|f(t)|^p > \frac{c}{2}$ für $t \in I \cap U_\delta(t_0)$. Es folgt

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f|^p \ge \int_{\max\{a,t_0-\delta\}}^{\min\{b,t_0+\delta\}} |f|^p \ge \frac{c}{2}\Big(\min\{b, t_0+\delta\} - \max\{a, t_0-\delta\}\Big) > 0,$$

also $\|f\|_p > 0$. Es folgt die Definitheit von $\|\cdot\|_p$. Zur Homogenität: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\lambda f\|_p^p = \int_a^b |\lambda f|^p = |\lambda|^p \int_a^b |f|^p = |\lambda|^p \|f\|_p^p,$$

also $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$. □

Satz 19.5 (Höldersche Ungleichung)**.** *Sei $p \in (1,\infty)$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt:*

(a) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ ist*

$$\Big|\sum_{i=1}^N x_i y_i\Big| \le \sum_{i=1}^N |x_i||y_i| \le |x|_p |y|_q.$$

(b) *Für alle $f, g \in C(I)$ ist*

$$\Big|\int_a^b fg\Big| \le \int_a^b |f|\,|g| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Bemerkung: Man nennt q den zu p konjugierten Exponent und schreibt auch oft p' anstelle von q.

Beweis. **(a):** Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Ist $|x|_p = |y|_q = 1$, so gilt mit der Youngschen Ungleichung (siehe Analysis I, Beispiel 14.17):

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \Big) = \frac{|x|_p^p}{p} + \frac{|y|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Im allgemeinen Fall setze $\hat{x} = \frac{1}{|x|_p} x$ und $\hat{y} = \frac{1}{|y|_q} y$. Wegen Satz 19.4 gilt $|\hat{x}|_p = |\hat{y}|_q = 1$, und mit obiger Rechnung folgt

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i|\,|y_i| = |x|_p\,|y|_q \sum_{i=1}^{N} |\hat{x}_i|\,|\hat{y}_i| \leq |x|_p\,|y|_q.$$

(b): Übung (Blatt 1). □

Satz 19.6 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann gelten*

(a) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^N$.

(b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ *für alle* $f, g \in C(I)$.

Beweis. **(a):** Seien $x, y \in \mathbb{R}^N$. Für $p = 1$ erhalten wir sofort

$$|x + y|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{N} |x_i| + \sum_{i=1}^{N} |y_i| = |x|_1 + |y|_1.$$

Im Fall $p > 1$ setzen wir $z = (|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1}) \in \mathbb{R}^N$. Mit $q := p' = \frac{p}{p-1}$ gilt dann

$$(19.1) \qquad |z|_q^q = \sum_{i=1}^{N} z_i^q = \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p = |x + y|_p^p, \qquad \text{also} \qquad |z|_q = |x + y|_p^{p-1}.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |x + y|_p^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i| z_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| z_i + \sum_{i=1}^{N} |y_i| z_i \leq |x|_p |z|_q + |y|_p |z|_q \overset{(19.1)}{=} (|x|_p + |y|_p) |x + y|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

also $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$.

(b): Übung (Blatt 1). □

Aus Satz 19.5 und Satz 19.6 folgt

Korollar 19.7. *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann ist* $|\cdot|_p$ *ist eine Norm auf* $\mathbb{R}^N$, *und* $\|\cdot\|_p$ *ist eine Norm auf* $C(I)$.

Definition 19.8 (Skalarprodukt)**.** Ein *Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ derart, dass für $v,w,z\in V$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ gilt:

(S1) $\langle\lambda v+\mu w,z\rangle=\lambda\langle v,z\rangle+\mu\langle w,z\rangle$ (*Linearität in der ersten Komponente*)

(S2) $\langle v,w\rangle=\langle w,v\rangle$ (*Symmetrie*)

(S3) $\langle v,v\rangle\geq 0,\qquad$ und $\langle v,v\rangle=0$ genau dann, wenn $v=0$. (*Definitheit*)

Das Paar $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Skalarproduktraum oder Prähilbertraum. Aus (S1) und (S2) folgt auch die Linearität in der zweiten Komponente: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist eine *bilineare Abbildung.*

Beispiel 19.9. (a) Das *euklidische Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^N$ ist definiert durch

$$\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^N x_iy_i\qquad\text{für } x,y\in\mathbb{R}^N.$$

(b) Auf $C(I)$ ist ein Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f,g\rangle:=\int_a^b fg\qquad\text{für } f,g\in C(I).$$

Satz 19.10. *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\|\cdot\|\colon V\to[0,\infty)$ definiert durch $\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.*

(a) *Für $v,w\in V$ gilt die* Cauchy-Schwarz-Ungleichung*,*

$$|\langle v,w\rangle|\leq\|v\|\|w\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v,w linear abhängig sind.

(b) *$\|\cdot\|$ ist eine Norm auf V.* Man nennt $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm.

Beweis. Für $v,w\in V$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(19.2)\quad 0\leq\langle v-\lambda w,v-\lambda w\rangle&=\langle v,v\rangle-\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\langle w,v\rangle+\lambda^2\langle w,w\rangle\\&=\|v\|^2-2\lambda\langle v,w\rangle+\lambda^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

(a): Sei nun ohne Einschränkung $w\neq 0$. Mit $\lambda=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}$ (der Minimalstelle des quadratischen Polynoms in λ aus (19.2)) folgt dann

$$0\leq\|v\|^2-2\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2}+\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2}=\frac{\|v\|^2\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2},$$

also $|\langle v,w\rangle|\leq\|v\|\|w\|$. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn mit dieser Wahl von λ bereits in (19.2) Gleichheit gilt, d.h. wenn $v=\lambda w$ ist.

(b): Die Definitheit von $\|\cdot\|$ folgt direkt aus der Definitheit des Skalarprodukts.
Zur Homogenität: Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ ist

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle = \lambda^2 \|v\|^2,$$

also $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
Zur Dreiecksungleichung: Für $v, w \in V$ gilt mit (a):

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ \le \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 19.11. Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ induziert die Norm $|\cdot|_2$, denn es gilt $|x|_2^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 = \langle x, x\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^N$. Die Norm $|\cdot|_2$ bezeichnet man daher auch als die *euklidische Norm*.
Das in Beispiel 19.9 definierte Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $C(I)$ induziert die Norm $\|\cdot\|_2$.

20. Metrische Räume

Bemerkung 20.1. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so kann man durch $d(x,y) := \|x-y\|$ (d steht für *distance*) den Abstand zwischen beliebigen Punkten $x, y \in V$ definieren. Es gilt dann für $x, y, z \in V$:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

Wir brauchen einen allgemeinen Abstandsbegriff mit diesen Eigenschaften für Punkte in einer Menge X. Sei z.B. X die Menge der Straßenadressen in Deutschland. Logistisch relevant ist nicht der Luftlinienabstand zwischen den Adressen aus X, sondern z.B. die Länge der kürzesten Verbindung im Straßennetz (oder in einem allgemeineren Verkehrsnetz).

Definition 20.2 (Metrik)**.** Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ derart, dass für $x, y, z \in X$ gilt:

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*Definitheit*)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (*Symmetrie*)

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*.

Beispiel 20.3. (a) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist (V, d) ein metrischer Raum mit der durch die Norm induzierten Metrik $d\colon V \times V \to [0, \infty)$, $d(x,y) := \|x-y\|$, siehe Bemerkung 20.1. Es gilt also

$$\text{Skalarproduktraum} \quad \longrightarrow \quad \text{normierter Raum} \quad \longrightarrow \quad \text{metrischer Raum}$$

mit induzierten Strukturen. Alle Definition und Sätze über metrische Räume übertragen sich daher direkt auf normierte Räume und Skalarprodukträume.

Notation spezieller induzierter Metriken:

- $d_p(x,y) = |x-y|_p$ für $x, y \in \mathbb{R}^N$.
- $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ für $f, g \in C(I)$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ lässt sich z.B. die Zahl $d_1(x,y)$ anschaulich charakterisieren als die *minimale* Länge eines stückweise zu den Koordinatenachsen parallelen Streckenzuges, welcher die Punkte x und y verbindet. In Bemerkung 20.1 entspräche dies der logistisch relevanten Distanz in einem Straßennetz mit zwei Scharen paralleler Straßen, die sich im rechten Winkel schneiden („Mannheimer Metrik").

(b) Sei X eine beliebige Menge. Die *diskrete* Metrik d auf X ist definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

(c) Die französische Eisenbahnmetrik („FEB-Metrik") ist definiert auf $X = \mathbb{R}^2$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y|_2, & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig;} \\ |x|_2 + |y|_2, & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig,} \end{cases}$$

wo wir x und y als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ auffassen.

Im Folgenden sei (X,d) stets ein metrischer Raum.

Definition 20.4 (Grenzwert)**.** Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und $a \in X$. Gilt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$, so nennt man a *Grenzwert* der Folge $(x_n)_n$ und schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{oder} \qquad x_n \to a \text{ für } n \to \infty. \quad ((x_n)_n \textit{ konvergiert gegen } a)$$

Satz 20.5. *Konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ in X, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sind $a, b \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, b)$, so gilt

$$0 \leq d(a,b) \overset{(M3)}{\leq} d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

also $d(a,b) = 0$ und somit $a = b$ wegen (M1). □

Beispiel 20.6. Betrachte $x_n = (1, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a = (1,0) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_p)$, da

$$d_p(x_n, a) = |x_n - a|_p = \left|(0, \frac{1}{n})\right|_p = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(b) Bezüglich der FEB-Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $(x_n)_n$ nicht gegen a, da

$$d(x_n, a) = |x_n|_2 + |a|_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \geq 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definition 20.7. (a) Für $a \in X$, $r > 0$ sei

$$U_r(a) := \{y \in X \mid d(y,a) < r\} \qquad \textit{(offene } r\textit{-Kugel um } a\textit{)}$$
$$B_r(a) := \{y \in X \mid d(y,a) \leq r\} \qquad \textit{(abgeschlossene } r\textit{-Kugel um } a\textit{)}$$

(b) In einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt $B_1(0) = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ *Einheitskugel* von V.

Definition 20.8. (a) Sei $A \subseteq X$. Der *Durchmesser* von A ist definiert durch

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} \qquad \in \{-\infty\} \cup [0, \infty].$$

(b) A heißt *beschränkt*, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

(c) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt beschränkt, falls die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Bemerkung 20.9. (a) Es gilt $\operatorname{diam}(B_r(a)) \leq 2r$ für $a \in X$, $r > 0$.

(b) Ist $A \subseteq B \subseteq X$, so gilt $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

(c) Eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq X$ ist beschränkt genau dann, wenn $a \in X$ und $r > 0$ existiert mit $A \subseteq U_r(a)$.

Beweis. **(a):** Für $x, y \in B_r(a)$ gilt $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r$, und somit folgt $\operatorname{diam}(B_r(a)) \leq 2r$.

(b): Dies folgt direkt aus der Definition von diam.

(c): „$\Longleftarrow$“: Gilt $A \subseteq U_r(a)$ für ein $a \in X$, $r > 0$, so folgt

$$\operatorname{diam}(A) \overset{\text{(b)}}{\leq} \operatorname{diam}(U_r(a)) \overset{\text{(b)}}{\leq} \operatorname{diam}(B_r(a)) \overset{\text{(a)}}{\leq} 2r < \infty,$$

und somit ist A beschränkt.

„$\Longrightarrow$“: Nach Voraussetzung ist $r' := \operatorname{diam}(A) \in [0, \infty)$. Mit $r := r' + 1$ und beliebig gewähltem $a \in A$ gilt dann

$$d(x,a) \leq \operatorname{diam}(A) < r \qquad \text{für alle } x \in A,$$

also $A \subseteq U_r(a)$. □

Definition 20.10. Sei $A \subseteq X$ und $a \in X$. A heißt

(a) *Umgebung von a*, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subseteq A$.

(b) *offen* (in X), wenn es zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$, d.h. wenn A Umgebung von allen Punkten in A ist.

(c) *abgeschlossen* (in X), wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 20.11. *In jedem metrischen Raum* (X,d) *gilt:*

(a) *Für* $a \in X$, $r > 0$ *ist* $U_r(a)$ *offen und* $B_r(a)$ *abgeschlossen.*

(b) X, $\varnothing$ *sind jeweils offen* ***und*** *abgeschlossen.*

Beweis. **(a):** Sei $x \in U_r(a)$, d.h. $d(x,a) < r$. Mit $\varepsilon := r - d(x,a) > 0$ gilt für $y \in U_\varepsilon(x)$:

$$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon + d(x,a) = r, \qquad \text{also } y \in U_r(a).$$

Somit ist $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(a)$. Es folgt: $U_r(a)$ ist offen.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit von $B_r(a)$ zeigen wir:

$$X \setminus B_r(a) \text{ ist offen.} \tag{20.1}$$

Sei $x \in X \setminus B_r(a)$, d.h. $d(x,a) > r$. Mit $\varepsilon := d(x,a) - r > 0$ gilt für $y \in U_\varepsilon(x)$:

$$d(y,a) \ge d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \varepsilon = r, \qquad \text{also } y \in X \setminus B_r(a).$$

Somit ist $U_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus B_r(a)$. Es folgt (20.1).

(b): ist trivial. □

Beispiel 20.12. Sei $A := \{(t,0) \mid 1 < t < 3\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) A ist weder offen noch abgeschlossen im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

(b) Ist d die FEB-Metrik, so ist $A = U_1((2,0))$ bzgl. d, also ist A offen im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d)$.

Man kann offene Mengen auch als Ausgangspunkt der Untersuchungen wählen:

Definition 20.13. Seien Y eine Menge und $\mathcal{O} \subseteq 2^Y$ (d.h. $\mathcal{O}$ ist eine Familie von Teilmengen von Y) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $Y, \varnothing \in \mathcal{O}$;

(ii) wenn $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$ gilt, wo I eine beliebige Indexmenge ist, dann folgt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$;

(iii) wenn $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$ gilt, wo I eine endliche Indexmenge ist, dann folgt $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Dann heißt $\mathcal{O}$ eine *Topologie auf* Y. Die Elemente von $\mathcal{O}$ nennt man auch *offene Mengen*, und das Paar $(Y, \mathcal{O})$ heißt *topologischer Raum.* Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ heißt *abgeschlossen* wenn $Y \setminus A$ offen ist.

Bemerkung 20.14. Sei Y ein topologischer Raum. Ist $A_i \subseteq Y$ abgeschlossen für $i \in I$, so ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen. Ist ferner I *endlich*, so ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ abgeschlossen

Beweis. Für $i \in I$ ist A_i abgeschlossen, also $X \setminus A_i$ offen. Nach Definition 20.13(ii) ist

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

offen, also $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen. Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so folgt aus Definition 20.13(iii), dass

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

offen, also $\bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen ist. □

Satz 20.15. *Die Familie der (metrisch) offenen Mengen in X bilden eine Topologie auf X, die* metrische Topologie *oder die* von der Metrik induzierte Topologie.

Beweis. Wegen Satz 20.11(b) reicht es, die Eigenschaften in Definition 20.13(ii) und (iii) für die metrisch offenen Mengen zu zeigen. Seien dazu I eine Indexenge und $A_i \subseteq X$ offen für $i \in I$. Sei $x \in A := \bigcup_{i \in I} A_i$, d.h. $x \in A_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Da A_{i_0} offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A_{i_0} \subseteq A$. Es folgt, dass A offen ist.

Sei ferner I endlich, d.h. $I := \{1, \ldots, n\}$ und $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, d.h. $x \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Voraussetzung existieren $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq A_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Mit $\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i > 0$ gilt dann

$$U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Es folgt die Offenheit von $\bigcap_{i=1}^n A_i$. □

Bemerkung 20.16. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der von der Betragsnorm induzierten Metrik, um zu zeigen, dass in Satz 20.15 und in Bemerkung 20.14 die Endlichkeitsvoraussetzung nicht unwesentlich ist. Unendliche Schnitte offener Mengen sind im Allgemeinen nicht offen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ offen in $\mathbb{R}$, aber $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist nicht offen. Unendliche Vereinigungen abzählbarer Mengen sind dementsprechend im Allgemeinen auch nicht abgeschlossen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist z.B. $[\frac{1}{n}, 1]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aber $(0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ ist nicht abgeschlossen.

Definition 20.17. Sei $A \subseteq X$ und $a \in X$.

(a) Wir setzen

$$\mathring{A} := \bigcup_{B \subseteq A,\, B \text{ offen}} B \qquad \text{(\textit{Offener Kern von } A)}$$

$$\overline{A} := \bigcap_{B \supseteq A,\, B \text{ abgeschl.}} B \qquad \text{(\textit{Abschluss von } A)}$$

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A} \qquad \text{(\textit{Rand von } A).}$$

Wir verwenden außerdem die Schreibweise $\operatorname{int} A$ (*interior of* A) statt $\mathring{A}$ für kompliziertere Ausdrücke A.

(b) a heißt

- *innerer Punkt* von A, falls $a \in \mathring{A}$.
- *Berührpunkt* von A, falls $a \in \overline{A}$.
- *Randpunkt* von A, falls $a \in \partial A$.
- *Häufungspunkt* von A, falls $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Satz 20.18. *Seien $A, C \subseteq X$. Dann gilt:*

(a) *$\mathring{A}$ ist offen, und $\overline{A}$, ∂A sind abgeschlossen.*

(b) *A offen $\iff$ $A = \mathring{A}$.*

(c) *A abgeschlossen $\iff$ $A = \overline{A}$.*

(d) *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ und $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$.*

(e) *$\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$, $\quad X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)$ $\quad$ und $\quad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

(f) *Ist $A \subseteq C$, so folgt $\mathring{A} \subseteq \mathring{C}$ und $\overline{A} \subseteq \overline{C}$.*

Beweis. **(e):**

$$\overline{X \setminus A} = \bigcap_{\substack{B \supseteq X \setminus A \\ B \text{ abgeschl.}}} B = \bigcap_{\substack{B' \subseteq A \\ B' \text{ offen}}} X \setminus B' = X \setminus \bigcup_{\substack{B' \subseteq A \\ B' \text{ offen}}} B' = X \setminus \mathring{A}. \tag{20.2}$$

Sei ferner $D := X \setminus A$. Dann gilt $X \setminus \mathring{D} \overset{(20.2)}{=} \overline{X \setminus D} = \overline{A}$, also $\mathring{D} = X \setminus \overline{A}$. Schließlich ist

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) \overset{(20.2)}{=} \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

(a): Wegen Satz 20.15 ist $\mathring{A}$ offen und $\overline{A}$ abgeschlossen. Somit ist auch

$$\partial A \overset{\text{(e)}}{=} \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \qquad \text{abgeschlossen.}$$

(b) und (c) folgen aus (a) und Definition 20.17. (d) folgt aus (a)–(c). (f) folgt direkt aus Definition 20.17. □

Definition 20.19. Für $a \in X$ und $A \subseteq X$ sei

$$\operatorname{dist}(a, A) := \inf\{d(a, y) \mid y \in A\} \qquad (\textit{Abstand von } a \textit{ zu } A)$$

Satz 20.20. *Sei $A \subseteq X$ und $a \in X$. Dann gilt:*

(a) *Genau dann ist a innerer Punkt von A, wenn $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subseteq A$, d.h. wenn A eine Umgebung von a ist.*

(b) *Äquivalent sind:*

(i) $a \in \overline{A}$ *(d.h. a ist Berührpunkt von A).*

(ii) $\operatorname{dist}(a, A) = 0$

(iii) *Es existiert eine Folge* $(x_n)_n$ *in* A *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(c) *a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn eine Folge* $(x_n)_n$ *in* $A \setminus \{a\}$ *existiert mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Beweis. **(a):** „$\Rightarrow$": Sei $a \in \mathring{A}$. Da $\mathring{A}$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathring{A} \subseteq A$.

„$\Leftarrow$": Gilt umgekehrt $U_\varepsilon(a) \subseteq A$ für ein $\varepsilon > 0$, so folgt $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathring{A}$, da $U_\varepsilon(a)$ offen ist. Insbesondere folgt $a \in \mathring{A}$.

(b): Es gilt:

$$
\begin{aligned}
a \in \overline{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad a \notin X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A) \\
&\overset{\text{(a)}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } U_\varepsilon(a) \not\subseteq X \setminus A \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } U_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing.
\end{aligned} \tag{20.3}
$$

„(i) $\Rightarrow$ (iii)": Es folgt aus (20.3), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$ existiert, d.h. $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)": Es gilt $\operatorname{dist}(a, A) \leq d(a, x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\operatorname{dist}(a, A) = 0$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)": Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in A$ mit $d(x, a) < \varepsilon$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing$, und (20.3) liefert daher (i).

(c): folgt aus (b) angewandt auf $A \setminus \{a\}$. □

Korollar 20.21. *$A \subseteq X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn alle Folgen in A, die in X konvergieren, ihren Grenzwert in A haben.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 20.18(c) und Satz 20.20(b). □

Als Anwendung dieser Charakterisierung ergänzen wir einen intuitiveren Beweis der Aussage, dass die abgeschlossene Kugeln $B_r(a) \subseteq X$ abgeschlossen sind, siehe Satz 20.11(a):

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $B_r(a)$ mit $x_n \to x \in X$. Dann ist

$$
d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a) \leq d(x, x_n) + r \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},
$$

also $d(x, a) \leq \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + r = r$. Somit folgt $x \in B_r(a)$, und damit folgt die Abgeschlossenheit von $B_r(a)$. □

Satz und Definition 20.22. *Ist $M \subseteq X$, so erfüllt die Einschränkung von d auf $M \times M$ ebenfalls die metrischen Axiome, d.h. (M, d) ist ebenfalls ein metrischer Raum. Diese Metrik auf M heißt die* von X induzierte Metrik *und die zugehörige Topologie auf M heißt die* induzierte *(oder auch* relative*) Topologie von M. Die entsprechenden offenen und abgeschlossenen Mengen heißen* relativ offen *bzw.* relativ abgeschlossen. *Dabei gilt:*

(a) *A ist relativ offen in M genau dann, wenn eine offene Teilmenge $A' \subseteq X$ existiert mit $A = M \cap A'$.*

(b) *A ist relativ abgeschlossen in M genau dann, wenn $\overline{A}^X \cap M \subseteq A$ gilt. Hierbei bezeichne $\overline{A}^X$ den Abschluss von A in X. In diesem Fall gilt $A = \overline{A}^X \cap M$.*

Der Beweis dieser Aussagen verbleibt als Übung.

Beispiel 20.23. Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $M = \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, jeweils betrachtet mit der Metrik d_2. Dann ist jede Teilmenge von M relativ offen und abgeschlossen in M, aber keine nichtleere Teilmenge von M ist offen (in X).

21. Äquivalente Normen und die Topologie des $\mathbb{R}^N$

Satz 21.1 (Bolzano-Weierstraß). *Sei $(x_k)_k$ ein Folge in $\mathbb{R}^N$ derart, dass $C > 0$ existiert mit $|x_k|_\infty \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{k_j})_j$ und $a \in \mathbb{R}^N$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a$ bezüglich $|\cdot|_\infty$.*

Beweis. Induktion nach der Raumdimension N.

(a) „$N = 1$, d.h. $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}$, $|\cdot|_\infty = |\cdot|$“: In diesem Fall folgt die Behauptung aus dem bereits bewiesenen Satz 6.31 aus Analysis I.

(b) „$N \implies N+1$“: Schreibe $x_k = (y_k, t_k) \in \mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ mit $y_k \in \mathbb{R}^N$, $t_k \in \mathbb{R}$. Mit $(x_k)_k$ sind dann auch die Folgen $(y_k)_k$ und $(t_k)_k$ bzgl. $|\cdot|_\infty$ bzw. $|\cdot|$ beschränkt. Nach Induktionsannahme existiert $y \in \mathbb{R}^N$ und eine Teilfolge $(y_{k_j})_j$ von $(y_k)_k$ mit $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = y$ in $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_\infty)$. Zudem existiert nach Satz 6.31 eine Teilfolge $(t_{k_{j_\ell}})_\ell$ von $(t_{k_j})_j$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} t_{k_{j_\ell}} = t$. Mit $a = (y, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ folgt nun

$$|x_{k_{j_\ell}} - a|_\infty = \max\Big\{|y_{k_{j_\ell}} - y|_\infty, |t_{k_{j_\ell}} - t|_\infty\Big\} \to 0 \qquad \text{für } \ell \to \infty.$$

Es folgt $\lim_{\ell\to\infty} x_{k_{j_\ell}} = a$ bzgl. $|\cdot|_\infty$ und somit die Behauptung in $\mathbb{R}^{N+1}$.

$\square$

Definition 21.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ auf V heißen äquivalent, falls $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$c_1\|v\| \leq \|v\|_* \leq c_2\|v\| \qquad \text{für } v \in V.$$

Wir schreiben dann $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$.

Es ist eine einfache Übung zu zeigen, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen in einem Vektorraum ist.

Satz 21.3. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis. **1. Fall:** $V = \mathbb{R}^N$. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^N$. Wir zeigen: $\|\cdot\| \sim |\cdot|_\infty$. Für $x = (x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i e_i \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i|\|e_i\| \leq |x|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^N \|e_i\|}_{=:c_2} = c_2|x|_\infty. \tag{21.1}$$

Noch zu zeigen:

$$\text{(21.2)} \qquad \text{Es gibt } c_1 > 0 \text{ mit } c_1|x|_\infty \le \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N.$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann existieren $y_k \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k}|y_k|_\infty \ge \|y_k\|$. Setze $z_k := \frac{y_k}{|y_k|_\infty}$. Dann ist

$$|z_k|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|z_k\| = \frac{\|y_k\|}{|y_k|_\infty} \le \frac{1}{k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ bzgl. $\|\cdot\|$. Nach Satz 21.1 existiert $a \in \mathbb{R}^N$ und eine Teilfolge $(z_{k_j})_j$ mit $\lim_{j\to\infty}|z_{k_j} - a|_\infty = 0$ und somit $\lim_{j\to\infty}\|z_{k_j} - a\| = 0$ wegen (21.1). Es folgt $a = 0$. Andererseits hat man

$$\big|1 - |a|_\infty\big| = \big||z_{k_j}|_\infty - |a|_\infty\big| \le |z_{k_j} - a|_\infty \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty.$$

Also ist $|a|_\infty = 1$ im Widerspruch zu $a = 0$. Somit folgt (21.2), und aus (21.1) und (21.2) folgt: $\|\cdot\| \sim |\cdot|_\infty$. Mit der Transitivität von $\sim$ folgt die Äquivalenz von je zwei Normen auf $\mathbb{R}^N$.

2. Fall: V beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $N := \dim V < \infty$. Wähle einen linearen Isomorphismus $T\colon V \to \mathbb{R}^N$. Zu gegebenen Normen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ auf V definiere Normen $\|\cdot\|_T$, $\|\cdot\|_{T,*}$ auf $\mathbb{R}^N$ durch

$$\|x\|_T := \|T^{-1}x\|, \quad \|x\|_{T,*} := \|T^{-1}x\|_* \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^N.$$

Aus dem 1. Fall folgt $\|\cdot\|_T \sim \|\cdot\|_{T,*}$, d.h. es existieren $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1\|x\|_T \le \|x\|_{T,*} \le c_2\|x\|_T \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^N.$$

Außerdem gilt für alle $v \in V$:

$$\|v\| = \|T^{-1}Tv\| = \|Tv\|_T \qquad \text{und} \qquad \|v\|_* = \|T^{-1}Tv\|_* = \|Tv\|_{T,*}.$$

Zusammengenommen liefern diese Tatsachen $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$. □

Bemerkung 21.4 (Topologie des $\mathbb{R}^N$)**.** Man sieht leicht, dass sich die Eigenschaften „Offenheit“ und „Abgeschlossenheit“ sowie die Folgenkonvergenz bei Übergang zu einer äquivalenten Norm **nicht** ändern. Äquivalente Normen erzeugen also dieselbe *Topologie*, d.h. dasselbe System von offenen Teilmengen. Insbesondere ist die Topologie des $\mathbb{R}^N$ nach Satz 21.3 unabhängig von der gewählten Norm $\|\cdot\|$. Die Konvergenz einer Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^N$ ist dabei stets charakterisiert durch komponentenweise Konvergenz:

$$(KK) \qquad \begin{cases} x_k \to a = (a^1, \dots, a^N) & \text{in } \mathbb{R}^N \qquad \text{für } k \to \infty \quad \Longleftrightarrow \\ x_k^1 \to a^1, \dots, x_k^N \to a^N & \text{in } \mathbb{R} \qquad \text{für } k \to \infty \end{cases}$$

Dies überprüft man leicht durch Wahl der Norm $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{R}^N$.

Falls nicht anders angegeben, betrachten wir $\mathbb{R}^N$ ab jetzt immer mit der euklidischen Norm $|\cdot|_2$.

Bemerkung 21.5. Wie in den Übungen definieren wir für $r \in [1, \infty)$ die Folgenräume $\ell^r := \{(x_k) \subseteq \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r < \infty\}$ mit den Normen $\|(x_k)\|_r := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r\right)^{1/r}$, und $\ell^\infty := \{(x_k) \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$ mit der Norm $\|(x_k)\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$. Für $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt laut Übungsblatt 2 $\ell^p \subsetneq \ell^q$ und $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$. Wir zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf ℓ^p nicht äquivalent sind. Wäre dies der Fall, dann gäbe es nämlich $C > 0$, so dass $\|x\|_p \leq C\|x\|_q$ für alle $x \in \ell^p$ erfüllt wäre. Sei $(x_k) \in \ell^q \setminus \ell^p$ und sei für $n \in \mathbb{N}$ das Element $x^n \in \ell^p$ definiert durch $x^n := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x^n\|_p \leq C\|x^n\|_q \leq C\|x\|_q < \infty.$$

Dies zeigt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ konvergiert, im Widerspruch zu $x \notin \ell^p$. Also können die Normen nicht äquivalent sein.

22. Stetige Abbildungen

Im Folgenden seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume.

Definition 22.1 (Stetigkeit). (a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. f heißt *stetig in einem Punkt* $a \in X$, falls für alle Folgen $(x_n)_n$ in X die Implikation gilt:

$$(22.1) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{in } X \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{in } Y.$$

f heißt *stetig* (oder genauer: *stetig in* X), falls f in allen Punkten aus X stetig ist.

(b) Ist $M \subseteq X$, $f\colon M \to Y$ eine Abbildung und $a \in M$, so heißt f *stetig in* a, wenn die Implikation (22.1) für alle Folgen $(x_n)_n$ in M gilt. Man betrachtet in diesem Fall in der Stetigkeitsdefinition also den metrischen Teilraum (M, d_X) anstelle von (X, d_X).

Bemerkung 22.2. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ und $a \in X$ sind äquivalent:

(i) f ist stetig in a

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.

(iii) Für jede Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ eine Umgebung von a.

(ii) kann offensichtlich auch folgendermaßen ausgedrückt werden: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. (Beweis: Leichte Übung analog zu Analysis I, Satz 10.13.)

Satz 22.3. *Sei $a \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sind $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ in a stetig, so auch*

(a) $\lambda f + \mu g\colon X \to \mathbb{R}$.

(b) $f \cdot g\colon X \to \mathbb{R}$.

(c) $\frac{f}{g}\colon D_g \to \mathbb{R}$, *falls* $a \in D_g := \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweis. Wie in Analysis I, Satz 10.8 □

Beispiel 22.4. (a) Aus Bemerkung 21.4(KK) folgt direkt die Stetigkeit der Projektionsabbildungen

$$P_i\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad P_i(x) = x_i \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

(b) Jede Polynomfunktion

$$P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_1^{\alpha_{i_1}} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_{i_N}}$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\alpha_{i_j} \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq N$ ist stetig. Dies folgt aus (a) und Satz 22.3.

Bemerkung 22.5. Eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^N$ ist genau dann in $a \in X$ stetig, wenn ihre Komponentenfunktionen $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, in a stetig sind.

Beweis. Sei $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Dann:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a) \overset{\text{Bemerkung 21.4(KK)}}{\iff} \lim_{k\to\infty} f_i(x_k) = f_i(a) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Dies liefert die Behauptung. □

Definition 22.6 (Abbildungsgrenzwert)**.** Sei $A \subseteq X$, $f\colon A \to Y$ eine Abbildung und $a \in X$ ein Häufungspunkt von A. Ein Punkt $b \in Y$ heißt Grenzwert von f in a, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in $A \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Man schreibt dann $b = \lim_{x\to a} f(x)$. **Beachte:** Ist $a \in A$, so ist f genau dann in a stetig, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt.

Satz 22.7. *Seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen und $a \in X$. Ist f in a stetig und g in $f(a)$ stetig, so ist $g \circ f\colon X \to Z$ in a stetig.*

Beweis. Wie in Analysis I, Satz 10.10. □

Satz 22.8. *Für $f\colon X \to Y$ sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(i) *f stetig.*

(ii) *Für jede offene Menge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen.*

(iii) *Für jede abgeschlossene Menge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ abgeschlossen.*

Beweis. **(i) $\Longrightarrow$ (iii):** Sei $V \subseteq Y$ abgeschlossen, und sei $(x_n)_n$ eine Folge in $f^{-1}(V)$ mit $x_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Gemäß Korollar 20.21 ist zu zeigen: $a \in f^{-1}(V)$. Da f in a stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, wobei $f(x_n) \in V$ für alle n. Mit Korollar 20.21 folgt: $f(a) \in V$, also $a \in f^{-1}(V)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Ist $V \subseteq Y$ offen, so ist $Y \setminus V \subseteq Y$ abgeschlossen, also nach (iii) auch

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

als Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $a \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da $U_\varepsilon(f(a)) \subseteq Y$ offen ist, ist mit (ii) auch

$$f^{-1}\Big(U_\varepsilon(f(a))\Big) \subseteq X \qquad \text{offen.}$$

Somit existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subseteq f^{-1}\Big(U_\varepsilon(f(a))\Big)$, also $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$. Mit Bemerkung 22.2 folgt: f ist stetig in a. □

Bemerkung 22.9. Satz Satz 22.8 ist sehr nützlich, um Offenheit oder Abgeschlossenheit von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ zu beweisen. So ist z.B. die Menge

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 14x^2 + 3y^4 - 2xy < 5\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

offen, da sie sich als Urbild $A = f^{-1}((-\infty, 0))$ der offenen Teilmenge $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 14x^2 + 3y^4 - 2xy - 5$$

schreiben lässt (vgl. Beispiel 22.4(b)).

Definition 22.10. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt

- *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $x, y \in X$ die Implikation gilt:

$$d_X(x,y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- *Lipschitz-stetig*, falls ein $L \geq 0$ existiert derart, dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L \,\mathrm{d}_X(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{22.2}$$

  Eine Zahl L, für die (22.2) gilt, nennt man auch *Lipschitz-Konstante von f*.

Bemerkung 22.11. Für Abbildungen $f\colon X \to Y$ gelten folgende Implikationen:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ gleichmäßig stetig} \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ stetig.}$$

23. Lineare stetige Abbildungen

Im Folgenden seien V, W stets normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$. Ferner sei $\operatorname{Hom}(V,W) := \{T\colon V \to W \mid T\ \mathbb{R}\text{-linear.}\}$.

Satz 23.1. *Sei* $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$ *und*

$$\|T\| := \sup\big\{\|Tx\|_W \;\big|\; x \in V,\ \|x\|_V \le 1\big\} \qquad \in\ [0,\infty].$$

Dann sind äquivalent:

(i) T *ist Lipschitz-stetig.*

(ii) T *ist in* 0 *stetig.*

(iii) $\|T\| < \infty$.

Beachte: Wie man leicht sieht, ist $\|T\|$ die kleinste Zahl in $[0,\infty]$ derart, dass die Ungleichung

(23.1)
$$\|Tx\|_W \le \|T\|\,\|x\|_V \qquad \text{für alle } x \in V$$

gilt (unter der Vereinbarung $\infty \cdot 0 = 0$ und $\infty \cdot a = \infty$ für $a > 0$). Ist $V \neq \{0\}$, so ist

$$\|T\| = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V}.$$

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: trivial.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Zu $\varepsilon = 1$ existiert $\delta > 0$ mit $T\Big(U_\delta(0)\Big) \subseteq U_1\Big(T(0)\Big) = U_1(0)$, d.h.

$$\|Tx\|_W < 1 \qquad \text{für alle } x \in V \text{ mit } \|x\|_V < \delta.$$

Sei nun $x \in V$ mit $\|x\|_V \le 1$. Dann ist $\|\frac{\delta}{2}x\|_V \le \frac{\delta}{2} < \delta$, und somit

$$\|Tx\|_W = \frac{2}{\delta}\|T(\frac{\delta}{2}x)\|_W < \frac{2}{\delta}.$$

Es folgt: $\|T\| \le \frac{2}{\delta} < \infty$.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Für $x, y \in V$ gilt wegen (23.1):

$$\|Tx - Ty\|_W = \|T(x-y)\|_W \le \|T\|\|x-y\|_V.$$

Also ist T Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\|T\|$. □

Satz und Definition 23.2. *Die Menge* $\mathcal{L}(V,W) := \{T \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid T \textit{ stetig}\}$ *ist ein normierter Raum bzgl. der in Satz 23.1 definierten Norm*

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{L}(V,W) \to [0,\infty) \qquad (\textit{Operatornorm})$$

Wir betrachten $\mathcal{L}(V,W)$ *stets mit dieser Norm. Ist* $V = W$*, so schreiben wir* $\mathcal{L}(V)$ *anstelle von* $\mathcal{L}(V,V)$*.*

Beweis (Normeigenschaften). Seien $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$. Dann gilt:

$$\|T\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|Tx\|_W = 0 \quad \text{für alle } x \in V \quad \Longleftrightarrow \quad T = 0.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ferner

$$\|\lambda T\| = \sup\left\{ \underbrace{\|\lambda Tx\|_W}_{|\lambda|\|Tx\|_W} \;\middle|\; \|x\|_V \leq 1 \right\} = |\lambda| \sup\{\|Tx\|_W \mid \|x\|_V \leq 1\} = |\lambda|\|T\| < \infty,$$

insbesondere ist also $\lambda T \in \mathcal{L}(V,W)$. Schließlich ist für alle $x \in V$

$$\|(T+S)x\|_W = \|Tx + Sx\|_W \leq \|Tx\|_W + \|Sx\|_W \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|_V$$

also $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\| < \infty$, insbesondere ist also $S + T \in \mathcal{L}(V,W)$. □

Satz 23.3 (Submultiplikativität der Operatornorm)**.** *Sei* Z *ein weiterer normierter Raum mit Norm* $\|\cdot\|_Z$*, und seien* $T \in \mathcal{L}(V,W)$ *und* $S \in \mathcal{L}(W,Z)$*. Dann ist*

$$ST \in \mathcal{L}(V,Z) \qquad \textit{und} \qquad \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beweis. Für $x \in V$ ist

$$\|STx\|_Z \leq \|S\|\|Tx\|_W \leq \|S\|\|T\|\|x\|_V,$$

also folgt $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Satz 23.4. *Ist* $\dim V < \infty$*, so ist jede lineare Abbildung* $T \colon V \to W$ *stetig.*

Beweis. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Wir definieren eine weitere Norm $\|\cdot\|_T$ auf V durch

$$\|x\|_T = \|x\|_V + \|Tx\|_W \quad \text{für } x \in V \qquad \text{(sog. Graphennorm)}$$

Die Normeigenschaften sind klar. Aus Satz 21.3 folgt: $\|\cdot\|_T \sim \|\cdot\|_V$. Insbesondere existiert also $C > 0$ mit

$$\|x\|_T \leq C\|x\|_V \quad \text{für } x \in V, \text{ also } \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \quad \text{für } x \in V.$$

Es folgt $T \in \mathcal{L}(V,W)$ mit $\|T\| \leq C$. □

Beispiel 23.5. Wir betrachten $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ und die Operatornorm

$$\|L\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|Lx|_2}{|x|_2}$$

bzgl. der zugrundeliegenden Norm $|\cdot|_2$ sowohl auf $\mathbb{R}^N$ als auch auf $\mathbb{R}^m$. Um $\|L\|$ zu berechnen, machen wir zunächst einen

Exkurs in die lineare Algebra

1. Die *Adjungierte* $L^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$ von L ist eindeutig definiert durch die Eigenschaft

$$\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N,\ y \in \mathbb{R}^m, \tag{23.2}$$

wobei auf der linken bzw. rechten Seite dieser Gleichung das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^N$ steht. Die Existenz und Eindeutigkeit von L^* kann man z.B. über eine feste Matrixdarstellung einsehen. Sei dazu $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ die kanonische (d.h. aus Koordinaten bestehende) Basis von $\mathbb{R}^N$ und $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Aufgrund der Bilinearität des Skalarprodukts ist (23.2) dann äquivalent zu

$$\langle Le_i, e'_j\rangle = \langle e_i, L^*e'_j\rangle \qquad \text{für } i = 1, \dots, N,\ j = 1, \dots, m. \tag{23.3}$$

Sei nun $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times N}$ die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, und $(b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{N\times m}$ die Matrixdarstellung von L^* bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$. Für die linke Seite von (23.3) erhält man dann

$$\langle Le_i, e'_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^m a_{ki}e'_k, e'_j\rangle = \sum_{k=1}^m a_{ki}\langle e'_k, e'_j\rangle = a_{ji},$$

und für die rechte Seite gilt

$$\langle e_i, L^*e'_j\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^N b_{kj}e_k\rangle = \sum_{k=1}^N b_{kj}\langle e_i, e_k\rangle = b_{ij}.$$

Damit ist (23.2) äquivalent zu $b_{ij} = a_{ji}$ für $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m$. Also ist L^* eindeutig gegeben durch seine Matrixdarstellung (bzgl. der kanonischen Basen), welche durch Transposition aus der von L hervorgeht.

2. Das Argument unter 1. lässt sich nicht nur mit kanonischen Basen, sondern allgemeiner mit jeder Wahl von *Orthonormalbasen* $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^m$ durchführen. Dabei heißt eine Basis $v_1, \dots, v_N$ *Orthonormalbasis* von $\mathbb{R}^N$, wenn

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

für $i, j = 1, \dots, N$ gilt.

3. Ein Element $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{23.4}$$

In diesem Fall hat T nur reelle Eigenwerte, und $\mathbb{R}^N$ besitzt eine Orthonormalbasis aus zugehörigen Eigenvektoren.

Dies ist aus der linearen Algebra bekannt - wir werden aber später einen Beweis mit Hilfe mehrdimensionaler Differentialrechnung ergänzen.

Ende des Exkurses

Im Folgenden betrachten wir nun $T := L^*L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Dann ist T symmetrisch, denn

$$\langle L^*Lx, y\rangle = \langle Lx, Ly\rangle = \langle x, L^*Ly\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Somit besitzt $\mathbb{R}^N$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren $v_1, \dots, v_N$ von T zu reellen Eigenwerten $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_N$. Diese Eigenwerte sind allesamt nichtnegativ, denn es gilt

$$\lambda_1 |v_1|_2^2 = \langle \lambda_1 v_1, v_1\rangle = \langle Tv_1, v_1\rangle = \langle Lv_1, Lv_1\rangle = |Lv_1|_2^2.$$

Ist nun $x = \sum_{i=1}^N \mu_i v_i \in \mathbb{R}^N$, so folgt aus der Orthonormalität

$$|Lx|_2^2 = \langle Tx, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^N \mu_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i^2 \le \lambda_N \sum_{i=1}^N \mu_i^2 = \lambda_N |x|_2^2,$$

wobei für $x = v_N$ Gleichheit gilt. Es folgt

$$\|L\| = \sqrt{\lambda_N}.$$

Mit anderen Worten: Die Operatornorm von L bzgl. $|\cdot|_2$ ist die Wurzel des größten Eigenwertes von $L^*L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

Im Spezialfall $N = m$ und $L = L^*$ (d.h. L ist symmetrisch) erhält man

$$\|L\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } L\}.$$

Beispiel 23.6. (a) Sei $a \in \mathbb{R}^N$ fest und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ definiert durch

$$Tx = \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^N a_i x_i.$$

Betrachtet man $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $|\cdot|_p$ für ein $p \in [1, \infty]$ und $\mathbb{R}$ mit $|\cdot|$, so erhält man

$$\|T\| = \begin{cases} |a|_1, & \text{falls } p = \infty; \\ |a|_\infty, & \text{falls } p = 1; \\ |a|_{\frac{p}{p-1}}, & \text{falls } 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Beweis als Übung.

(b) Sei $V = C([0,1])$ und $T \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ definiert durch $T(f) = f(0)$. Betrachtet man V mit der Norm $\|\cdot\|_p$ für ein $p \in [1, \infty]$, so gilt:

- T ist stetig, falls $p = \infty$.
- T ist nicht stetig, falls $p < \infty$.

Beweis als Übung.

24. Kompaktheit

Im Folgenden sei (X, d) ein stets metrischer Raum. Zur Motivation dieses Kapitels betrachten wir folgende Frage: Unter welchen Bedingungen an X nimmt jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein Maximum und ein Minimum an? Wir wissen bereits aus der Analysis I, das dies für „kompakte“ Intervalle $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Eine allgemeinere Antwort auf diese Frage erhält man vermöge einer allgemeinen Betrachtung des Kompaktheitsbegriffs.

Definition 24.1. (a) (X, d) heißt *kompakt*, falls gilt: Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $U_i \subseteq X$, $i \in I$ offene Mengen mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, so existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. Mit anderen Worten: Jede offene Überdeckung von X lässt sich auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren.

(b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn der metrische Raum (A, d) kompakt ist. Dies ist nach Satz und Definition 20.22 genau dann der Fall, wenn gilt: Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $U_i \subseteq X$, $i \in I$ offene Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, so existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

Beispiel 24.2. (a) $A := \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht kompakt: Betrachte $I = \mathbb{N}$ und $U_n := (\frac{1}{n}, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle n und $A \subseteq (0, \infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Ist aber $J \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige endliche Teilmenge und $n_J := \max J$, so ist $A \not\subseteq \bigcup_{n\in J} U_n = (\frac{1}{n_J}, \infty)$.

(b) $A_0 := A \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt: Seien $U_i \subseteq \mathbb{R}$, $i \in I$ offen mit $A_0 \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann existiert $i_0 \in I$ mit $0 \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen in $\mathbb{R}$ ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Wähle nun $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$ und $i_n \in I$ mit $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$ für $n = 1, \ldots, m$. Dann ist

$$A_0 \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \qquad \text{mit der endlichen Teilmenge} \qquad J = \{i_0, \ldots, i_m\} \subseteq I.$$

Wie man leicht sieht, ist $A_0 = \overline{A}$, also ist A_0 abgeschlossen und beschränkt. Wir werden später sehen, dass solche Teilmengen in $\mathbb{R}$ und allgemeiner in jedem endlichdimensionalen normierten Raum bereits kompakt sind.

Satz 24.3. *X ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_k)_k$ in X eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei X kompakt, und sei $(x_k)_k$ eine Folge in X. Ohne Einschränkung sei $M := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Menge. Angenommen, kein $a \in X$ ist Grenzwert einer Teilfolge von $(x_k)_k$. Dann existiert für jedes $a \in X$ ein $\varepsilon_a > 0$ so, dass $U_{\varepsilon_a}(a) \cap M$ endlich ist. Da $X = \bigcup_{a\in X} U_{\varepsilon_a}(a)$ kompakt ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$. Es folgt: $M = M \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} M \cap U_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$ ist endlich $\lightning$!

„$\Longleftarrow$“: Seien $U_i \subseteq X$, $i \in I$ offen mit

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i. \tag{24.1}$$

Behauptung 1: Es gibt $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $a \in X$ ein $i_a \in I$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_a}$. Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in X$ mit

$$U_{\frac{1}{n}}(a_n) \not\subseteq U_i \qquad \text{für alle } i \in I. \tag{24.2}$$

Nach Voraussetzung hat die Folge $(a_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_j})_j$. Sei $a := \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \in X$. Wegen (24.1) existiert ein $i \in I$ mit $a \in U_i$. Da U_i offen ist, existiert auch ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subseteq U_i$. Sei nun $j \in \mathbb{N}$ fest gewählt mit $\frac{1}{n_j} < \frac{\delta}{2}$ und $d(a_{n_j}, a) < \frac{\delta}{2}$. Dann ist

$$U_{\frac{1}{n_j}}(a_{n_j}) \subseteq U_\delta(a) \subseteq U_i$$

im Widerspruch zu (24.2). Es folgt Behauptung 1.

Sei nun ε gemäß Behauptung 1 fest gewählt.

Behauptung 2: Es gibt endlich viele $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j)$. Angenommen, dies gilt nicht. Wir wählen a_1 beliebig;

$$\begin{aligned}
&\text{da } X \not\subseteq U_\varepsilon(a_1), \text{ existiert } a_2 \in X \setminus U_\varepsilon(a_1);\\
&\text{da } X \not\subseteq U_\varepsilon(a_1) \cup U_\varepsilon(a_2), \text{ existiert } a_3 \in X \setminus [U_\varepsilon(a_1) \cup U_\varepsilon(a_2)];\\
&\cdots \qquad \cdots\\
&\text{da } X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j), \text{ existiert } a_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j).
\end{aligned}$$

Diese Konstruktion definiert induktiv eine Folge $(a_n)_n$ in X derart, dass $d(a_n, a_m) \geq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Nach Voraussetzung muss $(a_n)_n$ aber eine konvergente Teilfolge $(a_{n_j})_j$ besitzen. Mit $a := \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$ hat man dann

$$\varepsilon \leq d(a_{n_j}, a_{n_{j+1}}) \leq d(a_{n_j}, a) + d(a, a_{n_{j+1}}) \to 0 \qquad \text{für } j \to \infty \qquad \text{↯!}$$

Es folgt Behauptung 2.

Mit Behauptung 1 und 2 folgt:

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_{a_j}}.$$

Es folgt die Kompaktheit von X. □

Satz 24.4. *Sei $A \subseteq X$ kompakt. Dann gilt:*

(a) *A ist beschränkt und abgeschlossen in X.*

(b) *Ist $B \subseteq A$ abgeschlossen, so ist auch B kompakt.*

Beweis. **(a): A ist beschränkt:** Sei $a \in X$ beliebig. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n(a) = X$. Nach Voraussetzung existiert also $J \subseteq \mathbb{N}$ endlich mit

$$A \subseteq \bigcup_{n\in J} U_n(a) = U_r(a) \qquad \text{mit } r := \max J.$$

A **ist abgeschlossen:** Sei $(x_k)_k$ eine Folge in A mit $x_k \to a \in X$ für $k \to \infty$. Nach Satz 24.3 existiert eine Teilfolge $(x_{k_j})_j$ mit $x_{k_j} \to b \in A$ für $j \to \infty$. Dann ist aber $a = b \in A$, und mit Korollar 20.21 folgt die Abgeschlossenheit von A.

(b): Sei $(x_k)_k$ eine Folge in B. Da A kompakt ist, existiert nach Satz 24.3 eine Teilfolge $(x_{k_j})_j$ mit $x_{k_j} \to a \in A$ für $j \to \infty$. Da $B \subseteq A$ abgeschlossen ist, folgt mit Korollar 20.21: $a \in B$. Also hat jede Folge in B eine in B konvergente Teilfolge, und mit Satz 24.3 folgt die Kompaktheit von B. □

Satz 24.5 (Heine-Borel)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann ist A kompakt genau dann, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Satz 24.4(a).

„$\Longleftarrow$“: Wir verwenden wieder Satz 24.3. Sei $(x_k)_k$ eine Folge in A. Da A beschränkt ist, existiert $C > 0$ mit $|x_k|_\infty \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 21.1 existiert also eine Teilfolge $(x_{k_j})_j$ mit $x_{k_j} \to a \in \mathbb{R}^n$ für $j \to \infty$. Da ferner $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, folgt $a \in A$. Also hat jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge, und dies war zu zeigen. □

Satz 24.6. *Sei (Y, d) ein weiterer metrischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig. Ist (X, d) kompakt, so gilt:*

(a) *$f(X)$ ist auch kompakt.*

(b) *f ist gleichmäßig stetig.*

(c) *Ist $Y = \mathbb{R}$, so nimmt f auf X ein Maximum und ein Minimum an.*

Beweis. **(a):** Seien $U_i \subseteq Y$ offen, $i \in I$ mit $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann ist $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$, und nach Satz 22.8 ist $f^{-1}(U_i)$ offen in X für $i \in I$. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U_i)$, also $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

Es folgt die Kompaktheit von $f(X)$.

(b): Angenommen, dies gilt nicht. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und Folgen $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ in X mit

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \qquad \text{und} \qquad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{24.3}$$

Nach Satz 24.3 existiert eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ von $(x_n)_n$ und $x \in X$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$. Wegen (24.3) folgt dann auch auch $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = x$. Da f in x stetig ist, folgt schließlich

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x) = \lim_{j\to\infty} f(y_{n_j}),$$

im Widerspruch zu $d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt.

(c): Nach (a) ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen nach Satz 24.4. Insbesondere ist

$$-\infty < \inf f(X) \leq \sup f(X) < \infty.$$

Zudem existieren Folgen $(x_k)_k$, $(y_k)_k$ in $f(X)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = \inf f(X)$ und $\lim_{k\to\infty} y_k = \sup f(X)$. Mit Korollar 20.21 folgt nun

$$\inf f(X), \sup f(X) \in f(X),$$

und dies ist die Behauptung. □

Bemerkung 24.7. Sei (Y, d) ein weiterer metrischer Raum. Eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn f und f^{-1} stetig sind. Nach Satz 22.8 und Satz 24.6(a) gilt für ein solches f und beliebige Teilmengen $A \subseteq X$:

(a) A ist offen in X genau dann, wenn $f(A)$ offen in Y ist.

(b) A ist abgeschlossen in X genau dann, wenn $f(A)$ abgeschlossen in Y ist.

(c) A ist kompakt genau dann, wenn $f(A)$ kompakt ist.

Sind ferner $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und ist $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ein linearer Homöomorphismus, so gilt für $A \subseteq V$:

(d) A ist beschränkt genau dann, wenn $T(A)$ beschränkt ist.

Das folgende Beispiel zeigt, dass man die Linearität in (d) nicht weglassen kann: Sei $X = U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $Y = \mathbb{R}^2$, jeweils mit der euklidischen Metrik d_2 betrachtet. Dann ist ein Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|_2} \tan\left(\dfrac{\pi |x|_2}{2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Übung: Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.

Korollar 24.8. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter Raum, so ist eine Teilmenge $A \subseteq V$ kompakt genau dann, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $N := \dim V$ und $T \in Hom(V, \mathbb{R}^N)$ ein Isomorphismus. Dann ist T auch ein Homöomorphismus nach Satz 23.4. Also gilt für $A \subseteq V$:

$$\begin{aligned} A \text{ kompakt} &\overset{\text{Bemerkung 24.7}}{\Longleftrightarrow} T(A) \text{ kompakt} \overset{\text{Satz 24.5}}{\Longleftrightarrow} T(A) \text{ beschränkt und abgeschlossen} \\ &\overset{\text{Bemerkung 24.7}}{\Longleftrightarrow} A \text{ beschränkt und abgeschlossen.} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 24.9. Die Einheitskugel $B_1(0)$ des normierten Raums $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, denn: Die Folge der Funktionen $f_n \in B_1(0)$, $f_n(x) = x^n$ hat keine bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergente (d.h. gleichmäßig konvergente) Teilfolge, vgl. Bemerkung 18.2, Analysis I. Tatsächlich gilt für jeden normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$:

$$\dim V < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{die Einheitskugel } B_1(0) \text{ in } V \text{ ist kompakt.}$$

Dies beweist man in der Funktionalanalysis.

25. Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Bemerkung 25.1. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, so beschreibt die Ableitung

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

die lokale Änderungsrate bzw. geometrisch die Steigung von f bei a. Ist f auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ definiert und $a \in U$, so kann man die Änderungsrate/Steigung von f in verschiedene Richtungen betrachten.

Definition 25.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $a \in U$.

(a) Sei $v \in \mathbb{R}^N$. Existiert

$$\partial_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \in \mathbb{R}^m,$$

so heißt $\partial_v f(a)$ die *Richtungsableitung* von f bei a in Richtung v.

(b) Sei $e_j \in \mathbb{R}^N$ der j-te Einheitsvektor, $j = 1 \dots N$. Existiert

$$\partial_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t},$$

so heißt $\partial_{e_j} f(a)$ die j-te *partielle Ableitung* von f in a.

Wir schreiben kurz $\partial_j f(a)$ anstelle von $\partial_{e_j} f(a)$. Andere übliche Schreibweisen: $\mathrm{D}_j f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x=a} f(x)$.

Bemerkung 25.3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$ fest. Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass die Funktionen

$$g_j\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad g_j(t) = f\,\underbrace{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots x_N)}_{\in U}, \qquad j = 1 \dots N$$

wohldefiniert sind, und im Falle der Existenz der Grenzwerte gilt:

$$\partial_j f(x) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{g_j(t) - g_j(0)}{t} \;=\; g_j'(0).$$

Merkregel: Man betrachtet alle x_i, $i \neq j$ als konstant und differenziert bzgl. x_j. Ist ferner $v \in \mathbb{R}^N$ fest gewählt, so existiert $\varepsilon > 0$ (abhängig von v) so, dass auch

$$g_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad g_v(t) = f\,\underbrace{(x + tv)}_{\in U}$$

wohldefiniert ist, und im Falle der Existenz der Grenzwerte gilt $\partial_v f(x) = g_v'(0)$.

Konkretes Beispiel hierzu: Betrachte

$$f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}.$$

Für festes $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ist dann $\partial_j f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2+\ldots+x_N^2}} 2x_j = \frac{x_j}{|x|_2}$ für $j = 1, \ldots, N$. Für $v \in \mathbb{R}^N$ ist

$$g_v(t) = f(x + tv) = \sqrt{(x_1 + tv_1)^2 + (x_2 + tv_2)^2 + \ldots + (x_N + tv_N)^2}$$

und somit $\partial_v f(x) = g_v'(0) = \frac{v_1 x_1 + v_N x_N}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_N^2}} = \sum_{j=1}^N \partial_j f(x) v_j$.

Bemerkung 25.4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $v \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt:

$$\partial_v f(a) \text{ existiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_v f_i(a) \text{ existiert für } i = 1 \ldots m$$

Im Falle der Existenz gilt

$$\partial_v f(a) = \begin{pmatrix} \partial_v f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_v f_m(a) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \partial_j f(a) = \begin{pmatrix} \partial_j f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_j f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{für } j = 1, \ldots, N$$

Beachte: Wir schreiben diese Vektoren als Spalten.

Definition 25.5. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Falls alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(a) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1 \ldots N$, existieren, so heißt die Matrix

$$J_f(a) = \big(\partial_1 f(a) \quad \cdots \quad \partial_N f(a)\big) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_N f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_N f_m(a) \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix von f in a.

Im Spezialfall $m = 1$ ist der *Gradient von f in a* definiert durch

$$\nabla f(a) := \underbrace{J_f(a)}_{\in \mathbb{R}^{1 \times N}}{}^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_N f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Beispiel 25.6. Betrachte $U\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\subseteq\mathbb{R}^2$ und

$$f\colon U\to\mathbb{R}^2, \qquad f(x_1,x_2)=\left(\begin{smallmatrix} x_1^3\log x_2 \\ \sin x_1\cos x_2\end{smallmatrix}\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f_1(x)=3x_1^2\log x_2, \quad \partial_2 f_1(x)=\frac{x_1^3}{x_2}\\
&\partial_1 f_2(x)=\cos x_1\cos x_2, \quad \text{und} \quad \partial_2 f_2(x)=-\sin x_1\sin x_2,
\end{aligned}$$

und somit

$$J_f(x)=\begin{pmatrix} 3x_1^2\log x_2 & \frac{x_1^3}{x_2} \\ \cos x_1\cos x_2 & -\sin x_1\sin x_2\end{pmatrix} \qquad \text{für } x\in U.$$

Bemerkung 25.7. Sei $U\subseteq\mathbb{R}^N$ offen, $a\in U$ und $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Selbst wenn alle Richtungsableitungen $\partial_v f(a)$, $v\in\mathbb{R}^N$ existieren, wird das lokale Änderungsverhalten von f um a durch diese Ableitungen im Allgemeinen nicht vollständig wiedergegeben. Wir betrachten hierzu als Beispiel die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Dann existieren alle Richtungsableitungen von f im Punkt $a=0\ \in\mathbb{R}^2$, denn für $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ gilt:

$$\partial_v f(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(tv)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^3v_1^2v_2}{t(t^4v_1^4+t^2v_2^2)}=\lim_{t\to0}\frac{v_1^2v_2}{t^2v_1^4+v_2^2}=\begin{cases}0, & v_2=0,\\ \dfrac{v_1^2}{v_2}, & v_2\neq0.\end{cases}$$

Allerdings ist f in 0 nicht einmal stetig, da

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\neq f(0)=0$$

gilt. Wir brauchen einen stärkeren Ableitungsbegriff, der ein solches Verhalten ausschließt.

26. Totale Differenzierbarkeit

Bemerkung 26.1. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit $c := f'(a)$, so ist

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(a) + c(t-a)$$

die einzige affin-lineare Abbildung mit

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - g(t)}{t - a} = 0.$$

Diese Eigenschaft kennzeichnet g als diejenige Gerade, welche f in der Nähe von a am besten approximiert (anschaulich: die Tangente). Wir wollen das Konzept der „besten affin-linearen Approximation“ nutzen, um die Differenzierbarkeit und die Ableitung einer Funktion in mehreren Variablen zu definieren.

Satz und Definition 26.2. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.*

(a) *f heißt* differenzierbar (auch: total differenzierbar) *in $a \in U$, falls es eine lineare Abbildung $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ gibt mit*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}}} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{|h|_2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^m. \tag{26.1}$$

(b) *Gilt* (26.1), *so existieren alle Richtungsableitungen von f in a, und es gilt*

$$\partial_v f(a) = Lv \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^N. \tag{26.2}$$

Also ist L durch (26.1) *eindeutig bestimmt.*

(c) *Wir setzen*

$$\mathrm{d}f(a) := L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$$

und nennen $\mathrm{d}f(a)$ die Ableitung von f in a *(auch* totales Differenzial von f in a*).*

(d) *f heißt differenzierbar, wenn f in allen $a \in U$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Abbildung $\mathrm{d}f\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ die* Ableitung von f.

Beweis von (b). Sei $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Dann folgt:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \left| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - Lv \right|_2 = |v|_2 \lim_{t \to 0} \frac{|f(a+tv) - f(a) - L(tv)|_2}{|tv|_2} \overset{(26.1)}{=} 0,$$

da $tv \to 0$ in $\mathbb{R}^N$ für $t \to 0$. Es folgt

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = Lv,$$

wie behauptet. $\square$

Bemerkung 26.3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $a \in U$.

(a) In (26.1) kann man $|\cdot|_2$ durch eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^N$ ersetzen, ohne dass sich die Definition ändert. Dies folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^N$.

(b) Man sieht leicht:

$$f \text{ ist differenzierbar in } a \quad\Longleftrightarrow\quad f_i\colon U \to \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar in } a \text{ für } i = 1\dots m.$$

Gilt dies, so folgt

$$\mathrm{d}f(a)v = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(a)v \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(a)v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ für } v\in\mathbb{R}^N \text{ und } \; J_f(a) = \begin{pmatrix} J_{f_1}(a) \\ \vdots \\ J_{f_m}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times N}.$$

Man kann die Komponenten von f also getrennt auf Differenzierbarkeit untersuchen.

(c) Ist f in a differenzierbar, so gilt $\partial_v f(a) = \mathrm{d}f(a)v$ für $v \in \mathbb{R}^N$ wegen (26.2), insbesondere also $\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)e_i$, für $i = 1\dots N$. Schreibt man $v = \sum_{j=1}^N v_j e_j$, so folgt

$$\mathrm{d}f(a)v = \sum_{j=1}^N v_j \mathrm{d}f(a)e_j = \sum_{j=1}^N v_j \partial_j f(a) = J_f(a)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}.$$

Also ist $J_f(a)$ die *Darstellungsmatrix* von $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^m)$ bzgl. der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^m$. Um im Matrixkalkül konsistent rechnen zu können, schreiben wir Vektoren im $\mathbb{R}^N$, welche als „Ableitungsrichtungen" auftauchen, ab jetzt immer als Spalten. Wir erhalten dann

$$\mathrm{d}f(a)v = J_f(a)v = \partial_v f(a) \qquad \text{für alle } v\in\mathbb{R}^N.$$

(d) Sei speziell $m = 1$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar. Dann folgt aus (c)

$$\partial_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle \overset{\text{Satz 19.10(a)}}{\leq} |\nabla f(a)|_2 |v|_2 \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^N.$$

Gleichheit gilt hier speziell für $v = \nabla f(a)$, also gibt der Vektor $\nabla f(a)$ die Richtung des steilsten Anstiegs von f an (falls $\nabla f(a) \neq 0$ ist).

Bemerkung 26.4. Jede lineare Abbildung $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist von der Form $L_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L_c t = ct$ für $t \in \mathbb{R}$. Ist also $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a \in I$ und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt:

$$
\begin{aligned}
& f \text{ ist differenzierbar in } a \text{ im Sinne von Satz und Definition 26.2 mit } \mathrm{d}f(a) = L_c \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(a+h) - f(a) - L_c h}{|h|} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{L_c h}{h} = c \\
\Leftrightarrow \quad & f \text{ ist in } a \text{ im Sinne der Analysis I differenzierbar mit } f'(a) = c.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall gilt also $\mathrm{d}f(a)v = f'(a)v$ für $v \in \mathbb{R}$.

Ist allgemeiner $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist γ in a genau dann differenzierbar, wenn alle Komponenten $\gamma_i \colon I \to \mathbb{R}$ in a im Sinne der Analysis I differenzierbar sind, und dann gilt:

$$
d\gamma(a)t = t\gamma'(a) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ mit} \quad \gamma'(a) := \begin{pmatrix} \gamma_1'(a) \\ \vdots \\ \gamma_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.
$$

Beispiel 26.5 (Affin lineare Abbildungen)**.** Sei $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ und $c \in \mathbb{R}^m$, und sei $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(x) = Lx + c$ Dann ist f differenzierbar mit $\mathrm{d}f(a) = L$ für alle $a \in \mathbb{R}^N$.

Beweis.

$$
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{|h|_2} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{|h|_2} = 0 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^N.
$$

□

Satz 26.6. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ in a differenzierbar. Dann ist f in a stetig.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)h}{|h|_2} = 0$, also auch

$$
0 = \lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)h] = \lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{x \to a} f(x) - f(a).
$$

Also ist f nach Definition 22.6 in a stetig. □

Satz und Definition 26.7. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die partiellen Ableitungen $\partial_j f(a)$, $j = 1, \ldots, N$ existieren in jedem Punkt $a \in U$, und die Abbildungen $\partial_j f \colon U \to \mathbb{R}^m$, $a \to \partial_j f(a)$ sind stetig.*

(ii) *f ist differenzierbar, und die Ableitung $\mathrm{d}f \colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ ist stetig.*

Gilt dies, so nennt man f stetig differenzierbar. *Wir setzen ferner*

$$C^1(U,\mathbb{R}^m) := \big\{ f\colon U \to \mathbb{R}^m \;\big|\; f \text{ stetig differenzierbar} \big\} \quad \text{und} \quad C^1(U) := C^1(U,\mathbb{R}).$$

Beweis. „(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Die Existenz der partiellen Ableitungen von f folgt aus Satz und Definition 26.2(b). Sei $j \in \{1,\dots,N\}$ und $a \in U$. Dann gilt

$$|\partial_j f(x) - \partial_j f(a)|_2 = |df(x)e_j - \mathrm{d}f(a)e_j|_2 \le \underbrace{\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(a)\|}_{\text{Op.-norm in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^m)} |e_j|_2 \to 0 \qquad \text{für } x \to a,$$

da $\mathrm{d}f$ nach Voraussetzung stetig in a ist. Es folgt die Stetigkeit von $\partial_j f$ in a.

„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: *1. Zur Differenzierbarkeit von f:* Ohne Einschränkung sei $m = 1$ (wegen Bemerkung 26.3(b)). Sei $a \in U$ und $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ (wie immer bzgl. $|\cdot|_2$). Sei ferner $h = (h_1,\dots,h_N)$ beliebig mit $|h|_2 < \varepsilon$. Sei schließlich $w^0 := a$ sowie $w^j := a + (h_1,\dots,h_j,0,\dots,0)$ für $j = 1,\dots,N$. Wir betrachten die Funktionen

$$g_j\colon [\,-|h_j|,|h_j|\,] \to \mathbb{R}, \qquad g_j(t) = f(w^{j-1} + te_j) \qquad \text{für } j = 1,\dots,N.$$

Dann ist $g_j'(t) = \partial_j f(w^{j-1} + te_j)$ für $t \in [\,-|h_j|,|h_j|\,]$, und nach dem Mittelwertsatz Satz 14.14 aus Analysis I existiert τ_j zwischen 0 und h_j mit

$$f(w^j) - f(w^{j-1}) = g_j(h_j) - g_j(0) = g_j'(\tau_j)h_j = \partial_j f(\underbrace{w^{j-1} + \tau_j e_j}_{=:v^j})h_j.$$

Es folgt

$$f(a+h) - f(a) = f(w^N) - f(w^0) = \sum_{j=1}^N [f(w^j) - f(w^{j-1})] = \sum_{j=1}^N \partial_j f(v^j)h_j. \tag{26.3}$$

Nach Konstruktion ist dabei $|v^j - a|_2 \le |h|_2$ für $j = 1,\dots,N$. Sei nun $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ definiert durch $Lx = \sum_{j=1}^N \partial_j f(a)x_j$. Wegen (26.3) gilt dann

$$|f(a+h)-f(a)-Lh| = \Big|\sum_{j=1}^N [\partial_j f(v^j) - \partial_j f(a)]h_j\Big| \le |h|_\infty \sum_{j=1}^N |\partial_j f(v^j) - \partial_j f(a)| \le c(h)|h|_2$$

mit $c(h) := \sum_{j=1}^N \sup\big\{|\partial_j f(v) - \partial_j f(a)| \;\big|\; v \in U_{|h|_2}(a)\big\}$. Da $\partial_j f$ nach Voraussetzung für alle j stetig ist, folgt $\lim_{h\to 0} c(h) = 0$. Somit ist f differenzierbar in a mit $\mathrm{d}f(a) = L$.

2. Zur Stetigkeit von $\mathrm{d}f$*:* Seien $a, x \in U$. Dann gilt für $y \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} |[\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(a)]y|_2 = |[J_f(x) - J_f(a)]y|_2 &= \Big|\sum_{j=1}^N y_j(\partial_j f(x) - \partial_j f(a))\Big|_2 \\ &\le |y|_\infty \sum_{j=1}^N |\partial_j f(x) - \partial_j f(a)|_2 \le |y|_2 \sum_{j=1}^N |\partial_j f(x) - \partial_j f(a)|_2. \end{aligned}$$

Für die Operatornorm folgt

$$\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(a)\| \leq \sum_{j=1}^{N} |\partial_j f(x) - \partial_j f(a)|_2 \to 0 \qquad \text{für } x \to a$$

nach Voraussetzung. Es folgt die Stetigkeit von $\mathrm{d}f$ in a. $\square$

Bemerkung 26.8. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar, so nennt man den Graphen der „Linearisierung" (d.h. der besten affin linearen Approximation)

$$g_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g_a(v) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(v-a).$$

von f bei a die *Tangentialebene von Graph f im Punkt $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^3$.*

Betrachte dazu speziell $U := \mathbb{R}^2$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|_2^2$. Dann ist $\partial_1 f(x) = 2x_1$ und $\partial_2 f(x) = 2x_2$ für $x \in \mathbb{R}^2$, insbesondere sind $\partial_1 f, \partial_2 f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Folglich ist $f \in C^1(U)$, insbesondere ist f in ganz U differenzierbar nach Satz und Definition 26.7. Für $a, v \in \mathbb{R}^2$ ist ferner

$$\mathrm{d}f(a)v = J_f(a)v = (2a_1,\ 2a_2)\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) = 2a_1v_1 + 2a_2v_2,$$

also $g_a(v) = |a|_2^2 + 2a_1(v_1 - a_1) + 2a_2(v_2 - a_2)$. Für $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhält man z.B. $g_a(v) = 1 + 2(v_1 - 1)$. (Übung: Skizziere f und Graph g_a.)

Satz 26.9 (Kettenregel)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $a \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $g\colon V \to \mathbb{R}^\ell$ Abbildungen, für die gilt:*

(a) $f(U) \subseteq V$

(b) *f ist in a differenzierbar*

(c) *g ist in $f(a)$ differenzierbar*

Dann ist auch $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ in a differenzierbar, und es gilt

$$d(g \circ f)(a) = \underbrace{\mathrm{d}g\big(f(a)\big)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)} \underbrace{\mathrm{d}f(a)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)} \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^\ell) \tag{26.4}$$

sowie

$$J_{g \circ f}(a) = \underbrace{J_g\big(f(a)\big)}_{\in \mathbb{R}^{\ell \times m}} \cdot \underbrace{J_f(a)}_{\in \mathbb{R}^{m \times N}} \quad \in \mathbb{R}^{\ell \times N} \tag{26.5}$$

Beweis. Sei $b := f(a)$, $L := \mathrm{d}f(a)$, $M := \mathrm{d}g(b)$ sowie

$$U_a := \big\{h \in \mathbb{R}^N \;\big|\; a + h \in U\big\} \qquad \text{und} \qquad V_b := \{h \in \mathbb{R}^m \mid b + h \in V\}.$$

Wir definieren ferner $R\colon U_a \to \mathbb{R}^m$ und $S\colon V_b \to \mathbb{R}^\ell$ durch $R(0) = 0$, $S(0) = 0$ und die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Lh + |h|_2 R(h) && \text{für } h \in U_a \setminus \{0\}, \\ g(b+h) &= g(b) + Mh + |h|_2 S(h) && \text{für } h \in V_b \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Da f in a und g in b differenzierbar ist, ist R in $0 \in U_a$ und S in $0 \in V_b$ stetig.

Sei nun $h \in U_a \setminus \{0\}$. Dann ist

$$f(a+h) = b + \xi(h) \qquad \text{mit} \qquad \xi(h) := Lh + |h|_2 R(h) \ \in \ V_b,$$

also

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(b+\xi(h)) - g(b) &= M\xi(h) + |\xi(h)|_2 S(\xi(h)) \\ &= MLh + |h|_2 MR(h) + |\xi(h)|_2 S(\xi(h)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a)) - MLh}{|h|_2} = MR(h) + \frac{|\xi(h)|_2}{|h|_2} S(\xi(h)),$$

wobei

$$\lim_{h\to 0} MR(h) = MR(0) = M0 = 0, \qquad \lim_{h\to 0} S(\xi(h)) = S(\xi(0)) = S(0) = 0$$

und

$$\frac{|\xi(h)|_2}{|h|_2} \le \frac{|Lh|_2}{|h|_2} + |R(h)|_2 \le \|L\| + |R(h)|_2 \qquad \text{mit } \lim_{h\to 0} |R(h)|_2 = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a)) - MLh}{|h|_2} = 0.$$

Somit ist $g \circ f$ differenzierbar in a mit $d(g\circ f)(a) = ML = \mathrm{d}g(f(a))\mathrm{d}f(a)$. Nach Übergang zu Darstellungsmatrizen erhält man schließlich (26.5). $\square$

Beispiel 26.10. Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1x_2) \\ x_1 - x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Dann sind f und g stetig differenzierbar mit

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1x_2)x_2 & \cos(x_1x_2)x_1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad J_g(y) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 26.9 folgt zum Beispiel für $a = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, also $f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(0,-1,1)\, J_f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 26.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Sind $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a, so auch*
- $f + g\colon U \to \mathbb{R}^m$ *mit* $d(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$.
- $\lambda f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *mit* $d(\lambda f)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a)$.

(b) *Sind $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, so auch fg mit $d(fg)(a) = g(a)\mathrm{d}f(a) + f(a)\mathrm{d}g(a)$.*

(c) *Ist $f\colon U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar in a, so auch $\frac{1}{f}\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $d\frac{1}{f}(a) = -\frac{1}{f(a)^2}\mathrm{d}f(a)$.*

Beweis. Beweis zur Übung empfohlen. Als weitere Übung schreibe man die Ableitungsregeln mit Jacobimatrizen bzw. bei (b) und (c) mit Gradienten. □

Definition 26.12. Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen.

(a) Eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^N$ heißt *Kurve.* γ heißt C^1-Kurve, falls γ stetig differenzierbar ist (d.h. falls alle Komponenten von γ stetig differenzierbar sind). In diesem Fall definiert man ferner
- für $t \in [a,b]$ den *Geschwindigkeitsvektor* $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_N'(t))^T \in \mathbb{R}^N$ (ebenfalls gebräuchlich ist die Bezeichnung $\dot{\gamma}(t)$).
- die *Länge* $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|_2$ von γ.

(b) Eine stetige Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ heißt *Vektorfeld.*

(c) Ist $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve und $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ ein Vektorfeld, so heißt

$$\int_\gamma f := \int_a^b \langle f(\gamma), \gamma' \rangle \qquad \textit{Kurvenintegral} \text{ von } f \text{ längs } \gamma.$$

Beispiel 26.13. (a) Seien $x, v \in \mathbb{R}^N$. Dann ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N,\ \gamma(t) = x + tv$ eine C^1-Kurve mit $\gamma'(t) = v$ für alle t und $\ell(\gamma) = |v|_2(b-a)$

(b) $\gamma\colon [0,\ 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t,\ \sin t)^{\mathrm{T}}$ ist eine C^1-Kurve mit

$$\gamma'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

Es folgt: $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'|_2 dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{=1}\, \mathrm{d}t = 2\pi$.

(c) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\Phi \in C^1(U)$, so ist $\nabla\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N,\ x \mapsto \nabla\Phi(x)$ ein Vektorfeld. Beispiel: Ist $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = \frac{1}{|x|_2}$, so ist

$$f(x) := \nabla\Phi(x) = -\frac{x}{|x|_2^3} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Sei γ wie in (b). Dann ist

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma), \gamma' \rangle = \int_0^{2\pi} \langle -\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - \sin t \cos t) \mathrm{d}t = 0.$$

Dies ist kein Zufall, wie wir in Satz 26.14 sehen werden.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = \left(\begin{smallmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$ und die Kurve γ wie in (b) definiert. Dann ist

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \langle \left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Satz 26.14. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $\Phi \in C^1(U)$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve. Dann gilt:*

$$\int_\gamma \nabla\Phi = \Phi\big(\gamma(b)\big) - \Phi\big(\gamma(a)\big).$$

Ist speziell γ geschlossen, *d. h. $\gamma(b) = \gamma(a)$, so folgt $\int_\gamma \nabla\Phi = 0$.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung Satz 16.5 (Analysis I) ist $\Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)) = \int_a^b (\Phi \circ \gamma)' \,\mathrm{d}t$, wobei nach Kettenregel gilt:

$$(\Phi \circ \gamma)'(t) = J_{\Phi\circ\gamma}(t) = J_\Phi(\gamma(t)) J_\gamma(t) = \langle \nabla\Phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \qquad \text{für } t \in (a,b).$$

Es folgt

$$\Phi\big(\gamma(b)\big) - \Phi\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b \langle \nabla\Phi(\gamma), \gamma' \rangle = \int_\gamma \nabla\Phi,$$

wie behauptet. □

Satz 26.15 (Mittelwertsatz 1. Version)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien ferner $x, y \in U$ derart, dass die Verbindungsstrecke zwischen x und y ganz in U liegt, d. h. $x + t(y - x) \in U$ für $t \in [0,1]$. Dann existiert $\tau \in (0,1)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f\big(x + \tau(y - x)\big), y - x \rangle.$$

Beweis. Sei $\gamma\colon [0,1] \to U$ definiert durch $\gamma(t) = x + t(y - x)$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 14.14) aus Analysis I existiert $\tau \in (0,1)$ mit

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = (f \circ \gamma)'(\tau),$$

wobei man wie im Beweis von Satz 26.14 sieht:

$$(f \circ \gamma)'(\tau) = \langle \nabla f(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau) \rangle = \langle \nabla f\big(x + \tau(y - x)\big), y - x \rangle.$$

Die Behauptung folgt. □

Definition 26.16. Seien $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ und $M\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times N}$, $t \mapsto M(t) = \big(m_{ij}(t)\big)_{ij}$ stetig. Wir setzen:

$$\int_a^b \gamma := \left(\int_a^b \gamma_1,\ \ldots\ ,\int_a^b \gamma_N\right)^T \quad \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_a^b M(t)\mathrm{dt} := \left(\int_a^b m_{ij}\right)_{ij} \quad \in \mathbb{R}^{m\times N}$$

Man sieht leicht, dass dann für $v \in \mathbb{R}^N$ gilt:

(a) $\langle \int_a^b \gamma, v\rangle = \int_a^b \langle \gamma, v\rangle$

(b) $\displaystyle\left(\int_a^b M\right) v = \int_a^b Mv \quad \in \mathbb{R}^m$ (Linearität des Integrals).

Satz 26.17. *Ist* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *stetig, so gilt*

$$\left|\int_a^b \gamma\right|_2 \leq \int_a^b |\gamma|_2.$$

Beweis. Sei $v := \int_a^b \gamma \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$|v|_2^2 = \left\langle \int_a^b \gamma, v\right\rangle \overset{\text{Definition 26.16(a)}}{=} \int_a^b \langle \gamma, v\rangle \leq \int_a^b |\gamma|_2 |v|_2 = |v|_2 \int_a^b |\gamma|_2,$$

also $|v|_2 \leq \int_a^b |\gamma|_2$, wie behauptet. □

Satz 26.18. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen und* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. *Seien ferner* $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^N$ *mit* $x + tv \in U$ *für* $t \in [0,1]$. *Dann gilt:*

(a) $f(x+v) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+tv)\,\mathrm{d}t\right)v \quad \in \mathbb{R}^m$ (Mittelwertsatz 2. Version)

(b) $|f(x+v) - f(x)|_2 \leq M|v|_2$ *mit* $M = \max_{0\leq t\leq 1} \|\mathrm{d}f(x+tv)\|$ (Schrankensatz)

Hier sei wie bisher stets

$$\|L\| = \sup_{w\,\in\,\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{|Lw|_2}{|w|_2} \qquad \text{für } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$$

die bzgl. $|\cdot|_2$ *gebildete Operatornorm.*

Beweis. **(a):** Für $i = 1, \ldots, m$ sei $g_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_i(t) = f_i(x+tv)$. Dann ist g_i stetig differenzierbar mit $g_i'(t) = J_{f_i}(x+tv)v$ für $t \in (0,1)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Satz 16.5 (Analysis I) gilt:

$$f_i(x+v) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i' = \int_0^1 J_{f_i}(x+tv)v\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left(\int_0^1 J_{f_i}(x+tv)\,\mathrm{d}t\right)}_{\in\mathbb{R}^{1\times N}} \underbrace{v}_{\in\mathbb{R}^n}.$$

Es folgt $f(x+v)-f(x)=\Big(\int_0^1 J_f(x+tv)\,\mathrm{d}t\Big)v$, wie behauptet.

(b): Gemäß (a) ist

$$|f(x+v)-f(x)|_2 = \Big|\int_0^1 \underbrace{J_f(x+tv)v}_{=\mathrm{d}f(x+tv)v}\,\mathrm{d}t\Big|_2 \overset{\text{Satz 26.17}}{\leq} \int_0^1 \underbrace{|\mathrm{d}f(x+tv)v|_2}_{\leq\|\mathrm{d}f(x+tv)\||v|_2}\,\mathrm{d}t \leq M|v|_2.$$

□

Bemerkung 26.19. (a) Für $\mathbb{R}^m$-wertige Abbildungen, $m \geq 2$, gibt es keine „punktweise" Version des Mittelwertsatzes wie in Satz 26.15. Ist z. B. $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, so ist

$$0=\frac{\gamma(2\pi)-\gamma(0)}{2\pi} \neq \gamma'(\tau) = \left(\begin{smallmatrix}-\sin\tau\\ \cos\tau\end{smallmatrix}\right) \qquad \text{für } \tau\in[0,2\pi].$$

Für die meisten Abschätzungen ist der Schrankensatz Satz 26.18(b) aber ausreichend.

(b) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $x,y\in U$ die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten auch in U liegt, d.h. falls $x+t(y-x)\in U$ für alle $x,y\in U$, $t\in[0,1]$ gilt. In diesem Fall sind die Sätze Satz 26.15 und Satz 26.18 auf alle Punkte $x,y\in U$ (mit $y=x+v$ im Fall von Satz 26.18) anwendbar.

27. Höhere Ableitungen

Definition 27.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Induktiv definieren wir für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: Eine Abb. $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ heißt k-*mal stetig differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$, $x \in U$, $j = 1 \ldots N$ existieren und die Abbildungen $\partial_j f\colon U \to \mathbb{R}^m$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar sind. Wir setzen

$$C^k(U, \mathbb{R}^m) := \big\{ f\colon U \to \mathbb{R}^m \;\big|\; f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar} \big\}.$$

Ferner sei $C^0(U, \mathbb{R}^m) := C(U, \mathbb{R}^m) = \big\{ f\colon U \to \mathbb{R}^m \;\big|\; f \text{ stetig} \big\}$. Offensichtlich gilt $C^0(U, \mathbb{R}^m) \supseteq C^1(U, \mathbb{R}^m) \supseteq C^2(U, \mathbb{R}^m) \supseteq \ldots$. Wir setzen auch

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, \mathbb{R}^m) \qquad \textit{(beliebig oft stetig differenzierbare Abbildungen)}$$

Schließlich verwenden wir die abkürzende Schreibweise $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Definition 27.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^2(U)$ und $x \in U$.

(a) $H_f(x) := \big(\partial_i \partial_j f(x)\big)_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ heißt *Hessematrix* von f in x

(b) Man setzt $\partial_i^2 := \partial_i \partial_i$ und $\Delta f(x) := \operatorname{Spur} H_f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^N \partial_i^2 f(x)$. Das Symbol $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial_i^2$ heißt *Laplace-Operator.*

Beispiel 27.3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \mathrm{e}^{x_1} x_1 (1 + x_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f(x) = \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1)(1 + x_2), \qquad \partial_2 f(x) = x_1 e^{x_1}, \\
&\partial_1 \partial_2 f(x) = \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1), \qquad \partial_2 \partial_1 f(x) = \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1), \\
&\partial_1^2 f(x) = \mathrm{e}^{x_1}(2 + x_1)(1 + x_2) \quad \text{und} \quad \partial_2^2 f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\nabla f(x) = \mathrm{e}^{x_1} \left(\begin{smallmatrix} (1+x_1)(1+x_2) \\ x_1 \end{smallmatrix} \right), \qquad H_f(x) = \mathrm{e}^{x_1} \begin{pmatrix} (2 + x_1)(1 + x_2) & 1 + x_1 \\ 1 + x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

und $\Delta f(x) = \mathrm{e}^{x_1}(2 + x_1)(1 + x_2)$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Die Symmetrie vom $H_f(x)$ ist eine generelle Eigenschaft, wie aus dem nun folgenden Satz 27.4 hervorgeht.

Satz 27.4 (von Schwarz)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a) \qquad \text{für } i, j = 1 \dots n.$$

Ist insbesondere $m = 1$, d.h. $f \in C^2(U)$, so ist $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $m = 1$, d.h. $f \in C^2(U)$, und $i \neq j$. Sei ferner $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$, und sei $V := U_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$g \in C^2(V), \qquad g(s,t) = f(a + se_i + te_j).$$

Dann gilt für $(s,t) \in V$:

$$\begin{aligned} &\partial_1 g(s,t) = \partial_i f(a + se_i + te_j), \qquad \partial_2 g(s,t) = \partial_j f(a + se_i + te_j) \\ &\partial_1 \partial_2 g(s,t) = \partial_i \partial_j f(a + se_i + te_j) \quad \text{und} \quad \partial_2 \partial_1 g(s,t) = \partial_j \partial_i f(a + se_i + te_j). \end{aligned}$$

Also ist zu zeigen:

$$\partial_1 \partial_2 g(0,0) = \partial_2 \partial_1 g(0,0) \tag{27.1}$$

Betrachte dazu $h \in C^2(V)$ definiert durch $h(s,t) = g(s,t) - g(s,0)$. Für $(s,t) \in V$ existieren nach dem Mittelwertsatz (aus Analysis 1) $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ mit $|\tau| \leq |s|$, $|\xi| \leq |t|$ und

$$h(s,t) - h(0,t) = \partial_1 h(\tau, t)s = [\partial_1 g(\tau, t) - \partial_1 g(\tau, 0)]s = \partial_2 \partial_1 g(\tau, \xi) ts.$$

Weil (τ, ξ) gegen $(0,0)$ strebt wenn (s,t) gegen $(0,0)$ strebt, folgt

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{h(s,t) - h(0,t)}{st} = \partial_2 \partial_1 g(0,0). \tag{27.2}$$

Andererseits existiert

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \lim_{t \to 0} \frac{h(s,t) - h(0,t)}{st} &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \lim_{t \to 0} \Big[\frac{g(s,t) - g(s,0)}{t} - \frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} \Big] \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [\partial_2 g(s,0) - \partial_2 g(0,0)] = \partial_1 \partial_2 g(0,0). \end{aligned} \tag{27.3}$$

Man sieht leicht ein, dass die beiden Grenzwerte in (27.2) und (27.3) übereinstimmen müssen. Also gilt (27.1), und das war zu zeigen. ☐

Korollar 27.5. *Ist $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und sind $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$, so gilt:*

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi 1}} \dots \partial_{i_{\pi k}} f(x) \quad \textit{für } x \in U$$

und jede Permutation $\pi \colon \{1 \dots k\} \to \{1 \dots k\}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 27.4 durch vollständige Induktion. Beachte dabei, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung von Transpositionen (d.h. Vertauschungen) schreiben lässt. ☐

Definition und Bemerkung 27.6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ ein Vektorfeld. Eine Funktion $\Phi \in C^2(U)$ heißt *Potential* für das Vektorfeld f, wenn $f = \nabla\Phi$ gilt.

Es ist wichtig zu wissen, ob f ein Potential besitzt, denn in diesem Fall gilt nach Satz 26.14:

$$\int_\gamma f = \Phi\big(\gamma(b)\big) - \Phi\big(\gamma(a)\big) \quad \text{für alle } C^1\text{-Kurven } \gamma\colon [a,b] \to U.$$

Notwendig für die Existenz eines Potentials Φ ist nach Satz 27.4 die Gültigkeit folgender *Integrabilitätsbedingungen*:

$$\partial_i f_j(x) = \partial_i\partial_j\Phi(x) = \partial_j\partial_i\Phi(x) = \partial_j f_i(x) \qquad \text{für alle } x \in U,\ i,j = 1,\dots,N. \tag{27.4}$$

Ist U *sternförmig*, d. h. gibt es ein $x_0 \in U$ mit $x_0 + t(y - x_0) \in U$ für alle $y \in U$, $t \in [0,1]$, dann ist $(*)$ auch hinreichend für die Existenz eines Potentials. Für einen Beweis letzterer Aussage siehe z.B. Heuser, Analysis II, Satz 182.2.

Beispiel 27.7. Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x) = (x_2^2, x_1)^{\mathrm{T}}$. Hat F ein Potential? Nein, da $\partial_1 F_2(x) = 1 \neq 2x_2 = \partial_2 F_1(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_2 \neq \frac{1}{2}$.

Satz 27.8 (über iterierte Richtungsableitungen)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, und seien $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^N$. Dann existiert die k-fache Richtungsableitung*

$$\partial_{v^1} \dots \partial_{v^k} f = \partial_{v^1}(\partial_{v^2}(\dots\partial_{v^k} f)) \quad \in\ C(U, \mathbb{R}^m),$$

und es gilt

$$\partial_{v^1} \cdots \partial_{v^k} f(x) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) v^1_{i_1} \cdots v^k_{i_k} \quad \textit{für } x \in U.$$

Beweis. Induktion nach k:

„$k = 1$“: Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und $v \in \mathbb{R}^N$. Dann ist

$$\partial_v f \in C(U, \mathbb{R}^m) \quad \text{gegeben durch} \quad \partial_v f(x) = J_f(x)v = \sum_{i=1}^{N} \partial_i f(x) v_i.$$

„$k - 1 \Longrightarrow k$“: Sei nun $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ und $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^N$. Wie oben ist

$$\partial_{v^k} f(x) = \sum_{i_k=1}^{N} \partial_{i_k} f(x) v^k_{i_k}. \tag{27.5}$$

Also ist $\partial_{v^k} f \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^m)$. Nach Induktionsannahme ist $\partial_{v^1} \dots \partial_{v^{k-1}}(\partial_{v^k} f) \in C(U, \mathbb{R}^m)$ und

$$\begin{aligned}\partial_{v^1} \dots \partial_{v^{k-1}}(\partial_{v^k} f)(x) &= \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}=1}^{N} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(\partial_{v^k} f)(x) v^1_{i_1} \dots v^{k-1}_{i_{k-1}} \\ &\overset{(27.5)}{=} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x) v^1_{i_1} \dots v^k_{i_k},\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Satz 27.9 (von Taylor, erste Version). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \in C^{k+1}(U)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner $v \in \mathbb{R}^N$ mit $a + tv \in U$ für $t \in [0,1]$. Dann existiert $\tau = \tau(v) \in [0,1]$ mit*

$$f(a+v) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial_v^j f(a)}{j!} + \frac{\partial_v^{k+1} f(a+\tau v)}{(k+1)!}$$

Hier ist $\partial_v^j f = \underbrace{\partial_v \dots \partial_v}_{j\text{-mal}} f$ die j-fache Richtungsableitung von f in Richtung v.

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(a+tv).$$

Induktiv sieht man: g ist $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, und

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+tv) = \partial_v f(a+tv) \\ g''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\partial_v f](a+tv) = \partial_v^2 f(a+tv) \\ &\dots \\ g^{(j)}(t) &= \partial_v^j f(a+tv) \quad \text{für } t \in [0,1] \text{ und } j \leq k+1. \end{aligned}$$

Nach Analysis I, Satz 17.9(b) existiert $\tau \in [0,1]$ mit

$$f(a+v) = g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial_v^j f(a)}{j!} + \frac{\partial_v^{k+1} f(a+\tau v)}{(k+1)!},$$

wie behauptet. □

Bemerkung 27.10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $a \in U$.

(a) Ist $f \in C^2(U)$, so gilt nach Satz 27.8 für $v, w \in \mathbb{R}^N$:

$$\partial_v f(a) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j f(a) v_j = \langle \nabla f(a), v \rangle \qquad \text{und}$$

$$\partial_v \partial_w f(a) = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \partial_j f(a) v_i w_j \; = \; \langle H_f(a) v, w \rangle \; = \; \langle v, H_f(a) w \rangle.$$

(b) Ist $f \in C^3(U)$, so gilt nach (a) und Satz 27.9 für $v \in \mathbb{R}^N$ mit $\{a + tv \mid t \in [0,1]\} \subseteq U$:

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) v, v \rangle + R_2(v)$$

mit $R_2(v) = \frac{\partial_v^3 f(a+\tau v)}{6}$ für ein $\tau \in [0,1]$.

Bemerkung und Definition 27.11. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$. Gemäß Satz 27.8 ist

$$\partial_v^k f(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) v_{i_1} \cdots v_{i_k} \qquad \text{für } x \in U,\ v \in \mathbb{R}^N. \tag{27.6}$$

Nach Korollar 27.5 müssen wir aber nicht alle N^k partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x)$ berechnen, da es auf die Reihenfolge der Indizes nicht ankommt. Um dies vereinfacht darzustellen, benötigen wir folgende Definitionen. Ein Element $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ heißt *Multiindex*. Wir setzen

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \quad (\textit{Länge von } \alpha) \qquad \text{und} \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_N! \quad (\textit{Fakultät von } \alpha)$$

Für $v \in \mathbb{R}^N$ sei zudem $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_N^{\alpha_N}$, und im Falle $|\alpha| \leq k$ sei $\partial^\alpha f(x) := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N} f(x)$ für $x \in U$.

Im Folgenden soll ausnahmsweise # die Mächtigkeit einer endlichen Menge bedeuten (anstatt $|\cdot|$ wie früher).

Satz 27.12 (aus der Kombinatorik, ohne Beweis). *Sei $k \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben, und sei $\varphi \colon \{1, 2, \ldots, N\}^k \to \mathbb{N}_0^N$ definiert durch*

$$\varphi_j(i_1, i_2, \ldots, i_k) := \#\big\{\ell \in \{1, 2, \ldots, k\} \bigm| i_\ell = j\big\} \qquad \textit{für } j = 1, 2, \ldots, N.$$

Die Werte von φ fassen wir als Multiindizes auf. Die Länge erfüllt dabei offensichtlich $|\varphi(i)| = k$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, N\}^k$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| = k$ gilt dann $\#\varphi^{-1}(\alpha) = \frac{k!}{\alpha!}$. Mit anderen Worten existieren genau $\frac{k!}{\alpha!}$ Tupel $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, N\}^k$ derart, dass jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ in $(i_1, \ldots, i_k)$ genau α_j-mal als Eintrag vorkommt.

Korollar 27.13. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$\partial_v^k f(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) v^\alpha \qquad \textit{für } x \in U \textit{ und } v \in \mathbb{R}^N.$$

Beweis. Sei φ wie in Satz 27.12 definiert. Die Darstellung (27.6), Korollar 27.5 und Satz 27.12 liefern

$$\begin{aligned} \partial_v^k f(x) = \sum_{i \in \{1,2,\ldots,N\}^k} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) v_{i_1} \cdots v_{i_k} &= \sum_{i \in \{1,2,\ldots,N\}^k} \partial^{\varphi(i)} f(x) v^{\varphi(i)} \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| = k}} \#\varphi^{-1}(\alpha) \partial^\alpha f(x) v^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) v^\alpha. \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 27.14 (von Taylor, zweite Version). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \in C^k(U)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner*

$$V := \{v \in \mathbb{R}^N \mid a + tv \in U \text{ für } t \in [0,1]\}.$$

Dann gilt

$$f(a+v) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha + R_k(v) \qquad \text{für } v \in V,$$

wobei

$$\lim_{v \to 0} \frac{R_k(v)}{|v|_2^k} = 0. \tag{27.7}$$

gilt. Ist zudem $f \in C^{k+1}(U)$, so existiert $\tau = \tau(v) \in [0,1]$ mit

$$R_k(v) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f\big(a + \tau v\big)}{\alpha!} v^\alpha \tag{27.8}$$

Beweis. Sei zunächst $f \in C^{k+1}(U)$ und $v \in V$. Nach Satz 27.9 existiert $\tau \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} f(a+v) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial_v^j f(a)}{j!} + \frac{\partial_v^{k+1} f(a+\tau v)}{(k+1)!} \\ &\overset{\text{Korollar 27.13}}{=} \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f\big(a+\tau v\big)}{\alpha!} v^\alpha}_{=R_k(v)}. \end{aligned}$$

Es folgt (27.8). Sei nun $f \in C^k(U)$. Dann gilt:

$$R_k(v) = R_{k-1}(v) - \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha \overset{(27.8)}{=} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(a+\tau v) - \partial^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha$$

für ein $\tau = \tau(v) \in [0,1]$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $|\alpha| = k$ gilt aber aufgrund der Stetigkeit von $\partial^\alpha f$:

$$\sup_{\tau \in [0,1]} |\partial^\alpha f(a+\tau v) - \partial^\alpha f(a)| \to 0 \qquad \text{für } v \to 0.$$

Ferner gilt

$$\frac{|v^\alpha|}{|v|_2^k} = \Big(\frac{|v_1|}{|v|_2}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{|v_N|}{|v|_2}\Big)^{\alpha_N} \le 1 \qquad \text{für } v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Also folgt $\lim_{v \to 0} \frac{R_k(v)}{|v|_2^k} = 0$, wie behauptet. $\square$

Definition und Bemerkung 27.15. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $a \in U$ und $f \in C^k(U)$. Dann heißt

$$T_a^k f \colon U \to \mathbb{R}, \qquad T_a^k f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

das *k-te Taylorpolynom von f in a*. Gemäß Satz 27.14 gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_a^k f(x)}{|x-a|_2^k} = 0,$$

und man kann zeigen, dass $T_a^k f$ das einzige Polynom vom Grad kleiner gleich k mit dieser Eigenschaft ist. Speziell erhält man (vgl. Bemerkung 27.10):

- $T_a^1 f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle$
- $T_a^2 f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(a)(x-a), (x-a) \rangle$

Beispiel 27.16. Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \mathrm{e}^{x_1} x_1(1+x_2)$. Nach Beispiel 27.3 ist

$$\nabla f(x) = \mathrm{e}^{x_1} \left(\begin{smallmatrix} (1+x_1)(1+x_2) \\ x_1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad H_f(x) = \mathrm{e}^{x_1} \begin{pmatrix} (2+x_1)(1+x_2) & 1+x_1 \\ 1+x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

In $0 \in \mathbb{R}^2$ erhält man

$$f(0) = 0, \qquad \nabla f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T_0^2 f(x) &= f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(0)x, x \rangle \\ &= 0 + x_1 + \frac{1}{2}(2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 0) = x_1 + x_1^2 + x_1x_2. \end{aligned}$$

Nun zu $T_0^3 f$: Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha| = 3$. Fallunterscheidung:

$\alpha = (3,0) \;\Rightarrow\; \alpha! = 6$ und $\partial^\alpha f(x) = \partial_1^3 f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{e}^{x_1}(2+x_1)(1+x_2) = \mathrm{e}^{x_1}(3+x_1)(1+x_2)$

$\alpha = (2,1) \;\Rightarrow\; \alpha! = 2$ und $\partial^\alpha f(x) = \partial_1^2 \partial_2 f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{e}^{x_1}(1+x_1) = \mathrm{e}^{x_1}(2+x_1)$

$\alpha = (1,2) \;\Rightarrow\; \partial^\alpha f(x) = \partial_1 \partial_2^2 f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} 0 = 0$

$\alpha = (0,3) \;\Rightarrow\; \partial^\alpha f(x) = \partial_2^3 f(x) = 0.$

Es folgt

$$\sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \frac{1}{2} x_1^3 + x_1^2 x_2,$$

also

$$T_0^3 f(x) = x_1 + x_1^2 + x_1x_2 + \frac{x_1^3}{2} + x_1^2 x_2 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^2.$$

Beachte: Wir mussten nur 4 und nicht 8 dritte partielle Ableitungen ausrechnen.

Bemerkung 27.17. Andere gebräuchliche Schreibweisen für höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_k}}}(x) \quad \text{anstelle von} \quad \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x),$$

$$D^\alpha f(x) \quad \text{anstelle von} \quad \partial^\alpha f(x).$$

28. Lokale Extrema

Definition 28.1. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X$.

(a) a heißt *lokales Minimum* von f, wenn $r > 0$ existiert mit $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in U_r(a)$.

(b) a heißt *striktes lokales Minimum* von f, wenn $r > 0$ existiert mit $f(x) > f(a)$ für alle $x \in U_r(a) \setminus \{a\}$.

(c) Gilt $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in X$, so heißt a *globales Minimum* von f.

(d) Analog zu (a)–(c) definiert man: a ist (striktes) lokales bzw. globales *Maximum* von f (Ungleichungen umkehren!).

(e) a heißt lokales (bzw. globales) *Extremum* von f, wenn a ein lokales (bzw. globales) Minimum oder Maximum von f ist.

Bemerkung 28.2. Diese Bezeichungen werden oft nicht nur für a, sondern auch für $f(a)$ verwendet. Z. B. sagt man „f hat in a ein lokales Maximum gegeben durch $f(a)$“.

Beispiel 28.3. (a) Sei $X = \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 2x^2$. Dann ist 0 ein lokales Maximum von f, aber kein globales Maximum. 1 und -1 sind globale Minima von f.

(b) Sei $X = [0,1]$ und $f\colon X \to \mathbb{R},\ f(x) = x$. Dann ist 0 ein globales Minimum von f und 1 ein globales Maximum.

(c) Sei $X = (0,1)$ und $f\colon X \to \mathbb{R},\ f(x) = x$. Dann hat f keine lokalen Extrema.

(d) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $f\colon X \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2$. Dann ist $(0,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein globales Minimum von f, aber *kein* striktes Minimum.

Satz 28.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(U)$ und $a \in U$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt $\nabla f(a) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei a ein lokales Maximum von f und $r > 0$ derart, dass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U_r(a)$. Dann gilt für $i = 1, \dots, N$:

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0+} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \leq 0, \quad \text{also } \partial_i f(a) = 0.$$

Es folgt $\nabla f(a) = 0$. □

Definition und Bemerkung 28.5. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(U)$. Ein Punkt $a \in U$ heißt *kritischer Punkt* von f, falls $\nabla f(a) = 0$, anderenfalls *regulärer Punkt*. Nach Satz 28.4 ist jedes lokale Extremum ein kritischer Punkt von f. Die Umkehrung gilt nicht: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ hat in $(0,0)$ einen kritischen Punkt, aber kein lokales Extremum, da

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(t,0) > 0,\ f(0,t) < 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Im Folgenden werden wir anhand der Hessematrix untersuchen, unter welchen Bedingungen kritische Punkte lokale Extrema sind.

Definition 28.6. Sei $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine symmetrische Matrix und

$$m(S) := \min_{|x|_2 = 1} \langle Sx, x \rangle, \qquad M(S) := \max_{|x|_2 = 1} \langle Sx, x \rangle$$

S heißt

- *positiv definit*, falls $m(S) > 0$;
- *positiv semidefinit*, falls $m(S) \geq 0$;
- *indefinit*, falls $m(S) < 0 < M(S)$;
- *negativ semidefinit*, falls $M(S) \leq 0$;
- *negativ definit*, falls $M(S) < 0$.

Bemerkung 28.7. Sei S wie in Definition 28.6. Dann gilt offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}^N$:

$$m(S)|x|_2^2 \ \leq \ \langle Sx, x \rangle \leq M(S)|x|_2^2$$

Satz 28.8. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^2(U)$, $a \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gilt:*

(a) *$H_f(a)$ positiv definit $\Rightarrow$ a striktes lokales Minimum*

(b) *$H_f(a)$ negativ definit $\Rightarrow$ a striktes lokales Maximum*

(c) *$H_f(a)$ indefinit $\Rightarrow$ a kein lokales Extremum.*

(d) *a lokales Minimum $\Rightarrow$ $H_f(a)$ positiv semidefinit*

(e) *a lokales Maximum $\Rightarrow$ $H_f(a)$ negativ semidefinit*

Gilt (c)*, so nennt man a auch einen* Sattelpunkt *von f.*

Beweis. Da a ein kritischer Punkt von f ist, gilt nach Bemerkung 27.10(b) und Satz 27.14

$$(28.1)\quad f(a+v) = f(a)+\frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle+R_2(v) \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^N \text{ mit } a + tv \in U \text{ für } t \in [0,1],$$

wobei $\lim_{v\to 0} \frac{R_2(v)}{|v|_2^2} = 0$ gilt. Es folgt insbesondere für $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$:

$$(28.2)\quad \begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\Big[\frac{1}{2}\langle H_f(a)tv, tv\rangle + R_2(tv)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle + |v|_2^2 \lim_{t\to 0} \frac{R_2(tv)}{|tv|_2^2} = \frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle. \end{aligned}$$

Nun zunächst zu (d): Da a lokales Minimum von f ist, gilt für $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$0 \le \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} \overset{(28.2)}{=} \frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle.$$

Also ist $H_f(a)$ positiv semidefinit.

(e) analog.

Zu (c): Da $H_f(a)$ indefinit ist, existieren $v, w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle < 0$ und $\frac{1}{2}\langle H_f(a)w, w\rangle > 0$. Aus (28.2) folgt dann

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} < 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tw) - f(a)}{t^2} > 0.$$

Somit existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$f(a+tv) < f(a) < f(a+tw) \qquad \text{für } 0 < |t| < \varepsilon.$$

Also ist a kein lokales Extremum von f.

Zu (a): Da $m := m(H_f(a)) > 0$ vorausgesetzt ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(a) \subseteq U \qquad \text{und} \qquad |R_2(v)| < \frac{m}{4}|v|_2^2 \quad \text{für } v \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\},$$

also

$$f(a+v) - f(a) \overset{(28.1)}{=} \frac{1}{2}\langle H_f(a)v, v\rangle + R_2(v) \overset{\text{Bemerkung 28.7}}{>} \frac{m}{2}|v|_2^2 - \frac{m}{4}|v|_2^2 \ge \frac{m}{4}|v|_2^2 > 0$$

für $v \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$. Es folgt $f(x) > f(a)$ für $x \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, und somit ist a ein striktes lokales Minimum von f.

(b) analog. □

Exkurs 28.9. Lineare Algebra (ohne Beweise) Sei $S \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch. Dann gilt:

(a) $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$

(b) S hat nur reelle Eigenwerte.

(c) Es existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $v^1 \dots v^N \in \mathbb{R}^N$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ von S (d. h. $Sv^i = \lambda_i v^i$ für $i = 1 \dots N$ und $\langle v^i, v^j \rangle = \delta_{ij}$). Insbesondere ist S diagonalisierbar. Dabei gilt

$$\lambda_1 = m(S) \qquad \text{und} \qquad \lambda_N = M(S).$$

Somit erhält man folgende Äquivalenzen:

- S positiv definit (bzw. semidefinit) $\iff$ alle Eigenwerte sind positiv (bzw. nicht negativ)
- S negativ definit (bzw. semidefinit) $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind negativ (bzw. nicht positiv)
- S indefinit $\iff$ es gibt positive und negative Eigenwerte.

Ist $N = 2$, d. h. $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so gilt

- S positiv definit $\iff$ $\det S > 0$ und $\operatorname{Spur} S > 0$
- S negativ definit $\iff$ $\det S > 0$ und $\operatorname{Spur} S < 0$
- S indefinit $\iff$ $\det S < 0$

Beispiel 28.10. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Dann gilt:

$$\nabla f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 3x^2-3y \\ 3y^2-3x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \iff x^2 = y \text{ und } y^2 = x \iff (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}$$

Also sind $p = (0,0)$ und $q = (1,1)$ die kritischen Punkte von f. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist zudem

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad H_f(p) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(q) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Da $\det H_f(p) = -9$, ist $H_f(p)$ indefinit und somit p kein lokales Extremum von f (Sattelpunkt).

Da ferner $\det H_f(q) = 27 > 0$ und $\operatorname{Spur} H_f(q) = 12 > 0$, ist $H_f(q)$ positiv definit und somit q ein striktes lokales Minimum.

f hat keine globalen Extrema, da

$$f(x,x) = 2x^3 - 3x^2 \to \begin{cases} \infty & \text{für } x \to \infty \\ -\infty & \text{für } x \to -\infty \end{cases}$$

29. Vollständigkeit, Fixpunkte und Nullstellen

Ein wichtiges Ziel der Analysis sind Lösungssätze für Gleichungen der Form $f(x) = 0$. Hierbei sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $A \subseteq V$ und $f\colon A \to V$ eine gegebene stetige Funktion. Genauso kann man in diesem Fall die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ betrachten, falls $f(A) \subseteq A$ gilt. Analytische Verfahren liefern in diesen Fällen häufig Cauchyfolgen $(x_n)_n$ von 'Approximationslösungen' mit $f(x_n) \to 0$ bzw. $f(x_n) - x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Daher ist es von Interesse, zu wissen, ob Cauchyfolgen im Definitionsbereich A von f konvergieren; in diesem Fall folgt durch Grenzwertbildung die Existenz einer tatsächlichen Lösung. Die Frage führt auf den Begriff der Vollständigkeit.

Definition 29.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *Cauchyfolge*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $m, n \geq N$.

(b) (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert *(man vergleiche dies mit Analysis I, Bemerkung 6.38)*.

(c) Ein vollständiger normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*.

(d) Ein vollständiger Skalarproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Hilbertraum*.

Bemerkung 29.2. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_n$ eine Folge in X, so gilt:

(a) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, so ist $(x_n)_n$ beschränkt.

(b) Ist $(x_n)_n$ konvergent, so ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(c) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge und besitzt $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge in X, so ist $(x_n)_n$ selbst konvergent.

Beweis. Übung. □

Satz 29.3. *Jeder endlichdimensionale normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in V. Dann ist $(x_n)_n$ beschränkt, also existiert $R > 0$ mit $x_n \in B_R(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von V ist $B_R(0)$ kompakt nach Satz 24.5, daher besitzt $(x_n)_n$ nach Satz 24.3 eine konvergente Teilfolge. Nach Bemerkung 29.2(c) ist $(x_n)_n$ dann selbst auch konvergent. □

Satz 29.4. *Sei $I := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Dann ist $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$, und sei $c_n := \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geq n}} \|f_m - f_n\|_\infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Cauchybedingung liefert $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Ist $t \in I$, so gilt zudem für $m, n \in \mathbb{N}$

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty,$$

also ist $(f_n(t))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent nach Satz 6.37. Definiere nun $f\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \qquad \text{für } t \in I.$$

Dann gilt

$$|f(t) - f_n(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geq n}} |f_m(t) - f_n(t)| \leq c_n \qquad \text{für } t \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt

$$0 \leq \|f - f_n\|_\infty \leq c_n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. die Folge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f im Sinne von Definition 18.1. Mit Satz 18.3 folgt die Stetigkeit von f, also hat die Folge im normierten Raum $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ den Grenzwert f. $\square$

Bemerkung 29.5. (a) Ist (K, d) ein *kompakter* metrischer Raum und $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum, so setzt man

$$C(K, V) := \{f\colon K \to V \mid f \text{ stetig}\}.$$

Ähnlich wie für $C(I)$ sieht man Folgendes:

- $C(K, V)$ ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} \|f(x)\|_V \overset{\text{Satz 24.6(c)}}{=} \max_{x\in K} \|f(x)\|$$

- Ist $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, so auch $(C(K, V), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Sei $I := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$, und sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $(C(I), \|\cdot\|_p)$ kein Banachraum.

Beweis: Übung.

(c) Seien V, W normierte Räume. Dann gilt:

Ist W ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(V, W)$, versehen mit der Operatornorm, ebenfalls ein Banachraum.

Dies beweist man ganz ähnlich wie Satz 29.4:

Beweis. Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V,W)$, und sei $c_n := \sup_{m\geq n}\|T_n - T_m\|$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Cauchybedingung liefert dann $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Für alle $x \in V$ gilt

$$\sup_{m\geq n}\|T_m x - T_n x\|_W \leq \sup_{m\geq n}\|T_m - T_n\|\|x\|_V = c_n\|x\|_V \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Somit ist $(T_n x)_n$ eine Cauchyfolge in W, und nach Voraussetzung existiert

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in W \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Aus der Linearität der Abbildungen T_n folgt direkt, dass auch die Zuordnung $x \mapsto Tx$ linear ist. Ferner ist

$$\|Tx\|_W = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\|_W \leq \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\Big)\|x\|_V \qquad \text{für alle } x \in V,$$

d.h. T ist stetig. Schließlich ist

$$\|(T - T_n)x\|_W = \lim_{m\to\infty}\|(T_m - T_n)x\|_W \leq \Big(\sup_{m\geq n}\|T_m - T_n\|\Big)\|x\|_V = c_n\|x\|_V$$

für alle $x \in V$, d.h. $\|T - T_n\| \leq c_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dies zeigt die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(V,W)$. □

Beachte: Ist $N = \dim V < \infty$ und $m = \dim W < \infty$, so ist

$$\dim \mathcal{L}(V,W) \overset{\text{Satz 23.4}}{=} \dim \operatorname{Hom}(V,W) = Nm < \infty,$$

also liefert in diesem Spezialfall auch bereits Satz 29.3 die Vollständigkeit.

Satz 29.6. *Ist (X,d) ein* vollständiger *metrischer Raum und $A \subseteq X$, so gilt:*

$$(A,d) \text{ vollständig} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq X \text{ abgeschlossen.}$$

Insbesondere ist jede abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums (z.B. von $\mathbb{R}^N$) vollständig.

Beweis. „$\Longrightarrow$": Sei $x \in \overline{A}$. Dann ist $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ für eine Folge $(x_n)_n$ in A. Nach Bemerkung 29.2(a) ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X und somit auch in A, und damit konvergiert $(x_n)_n$ nach Voraussetzung in A. Es folgt $x \in A$. Insgesamt folgt $A = \overline{A}$.

„$\Longleftarrow$": Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in A. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$, wobei $x \in \overline{A} = A$ nach Voraussetzung. Also konvergiert $(x_n)_n$ in A. □

Definition 29.7. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Existiert ein $q \in (0,1)$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in X,$$

so nennt man f eine *Kontraktion* (oder genauer: *q-Kontraktion*). Mit anderen Worten: $f\colon X \to X$ ist Lipschitz-stetig und besitzt eine Lipschitz-Konstante $q < 1$.

Satz 29.8 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \neq \varnothing$ und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen* Fixpunkt, *d.h. es gibt genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$. Ferner gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x \quad \textit{für alle } y \in X \qquad (\textit{wobei } f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} \textit{ sei.})$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $q \in (0,1)$ mit

$$d(f(y), f(z)) \leq q\, d(y,z) \qquad \text{für alle } y, z \in X. \tag{29.1}$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $x_1, x_2 \in X$ Fixpunkte von f. Mit (29.1) folgt dann

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq q d(x_1,x_2), \qquad \text{also } d(x_1,x_2) = 0 \text{ und damit } x_1 = x_2.$$

Um die Existenz und Konvergenz zu zeigen, Sei $y \in X$ beliebig, und sei $y_n := f^n(y)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (also $y_0 = y$). Wir zeigen per Induktion:

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq q^n d(y_1, y) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{29.2}$$

„$n = 0$“: klar.
„$n \Longrightarrow n+1$“:

$$d(y_{n+2}, y_{n+1}) = d(f(y_{n+1}), f(y_n)) \overset{(29.1)}{\leq} q d(y_{n+1}, y_n) \overset{\text{IA}}{\leq} q q^n d(y_1, y) = q^{n+1} d(y_1, y)$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ folgt nun mit der Dreiecksungleichung

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(y_{j+1}, y_j) \overset{(29.2)}{\leq} d(y_1,y) \sum_{j=n}^{m-1} q^j \leq d(y_1,y) q^n \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^n}{1-q} d(y_1,y) =: c_n.$$

Da $c_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist $(y_n)_n$ somit eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert $x := \lim_{n\to\infty} y_n$. Da ferner f stetig ist, folgt

$$f(x) = f\Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = x.$$

Also ist x der nach 1. eindeutige Fixpunkt von f, und es folgt $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x$ für alle $y \in X$, wie behauptet. □

Korollar 29.9. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$. Sei ferner $A \subseteq U$ abgeschlossen und* konvex, *d.h. für alle $x, y \in A$ möge auch die Verbindungsstrecke $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ ganz in A liegen. Ferner gelte*

(i) $f(A) \subseteq A$;

(ii) $\sup_{x\in A} \|\mathrm{d}f(x)\| < 1$.

Hier und im Folgenden bezeichne — wie im Schrankensatz Satz 26.18(b) — $\|\cdot\|$ *die bzgl. der euklidischen Norm* $|\cdot|_2$ *gebildete Operatornorm.*

Dann besitzt f *genau einen Fixpunkt in* A.

Beweis. Sei $q := \sup_{x\in A}\|\mathrm{d}f(x)\| < 1$. Für $x, y \in A$ liefert der Schrankensatz Satz 26.18(b) dann

$$|f(x) - f(y)|_2 \leq |x-y|_2 \max_{0\leq t\leq 1} \|\mathrm{d}f(\underbrace{y + t(x-y)}_{\in A})\| \leq q|x-y|_2.$$

Also ist $f\colon A \to A$ eine Kontraktion, und die Behauptung folgt aus Satz 29.8, angewandt auf den vollständigen metrischen Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^N$. □

Bemerkung 29.10. Viele Gleichungssysteme der Form $f(x) = 0$ mit $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sind nicht explizit lösbar, d.h. man kann die Lösungsmenge nicht in Formeln mit Hilfe von bereits bekannten Funktionen angeben. Man kann aber oft Punkte $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$ finden, für die $f(\tilde{x})$ schon sehr nahe bei $0 \in \mathbb{R}^N$ liegt. In solchen Fällen ist die Frage naheliegend, ob in der Nähe von $\tilde{x}$ dann auch eine „echte" Nullstelle von f liegt. Dies soll im Folgenden untersucht werden.

Satz 29.11 (einfaches Schattenlemma)**.** *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen und* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$. *Seien ferner* $\tilde{x} \in U$, $\delta > 0$, $q \in (0,1)$ *und* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ *mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

(i) L *ist invertierbar mit Inverser* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $|f(\tilde{x})|_2 < \frac{\delta(1-q)}{\|L^{-1}\|}$.

(iii) $\|\mathrm{d}f(x) - L\| \leq \frac{q}{\|L^{-1}\|}$ *für* $x \in B_\delta(\tilde{x})$.

Dann gilt:

(a) *Die Abbildung* $T\colon B_\delta(\tilde{x}) \to B_\delta(\tilde{x})$, $T(x) = x - L^{-1}f(x)$ *ist eine (wohldefinierte)* q*-Kontraktion, welche genau einen Fixpunkt in* $U_\delta(\tilde{x})$ *hat.*

(b) f *besitzt genau eine Nullstelle in* $U_\delta(\tilde{x})$.

Beweis. (b) folgt direkt aus (a).

Zu (a): Gemäß (iii) gilt

$$\|\mathrm{d}T(x)\| = \|\mathrm{id} - L^{-1}\mathrm{d}f(x)\| \leq \|L^{-1}\|\|L - \mathrm{d}f(x)\| \leq q \qquad \text{für } x \in B_\delta(\tilde{x}).$$

Wie im Beweis von Korollar 29.9 folgt

$$|T(x) - T(y)|_2 \leq q|x-y|_2 \qquad \text{für } x, y \in B_\delta(\tilde{x}).$$

Für $x \in B_\delta(\tilde{x})$ ist ferner

$$\begin{aligned} |T(x) - \tilde{x}|_2 &\leq |T(x) - T(\tilde{x})|_2 + |T(\tilde{x}) - \tilde{x}|_2 \leq q|x - \tilde{x}|_2 + |L^{-1}f(\tilde{x})|_2 \\ &\leq q\delta + \|L^{-1}\|\,|f(\tilde{x})|_2 \overset{\text{(ii)}}{<} q\delta + \delta(1-q) = \delta, \end{aligned}$$

also $T(x) \in U_\delta(\tilde{x})$. Dies zeigt (a). □

Bemerkung und Beispiel 29.12. (a) Unter den Voraussetzungen von Satz 29.11 findet man die eindeutige Nullstelle von f in $B_\delta(\tilde{x})$ durch Iteration der Funktion

$$B_\delta(\tilde{x}) \to B_\delta(\tilde{x}), \qquad x \mapsto x - L^{-1} f(x).$$

Allerdings ist richtige Wahl des festen Punktes $\tilde{x}$ und der linearen Abbildung $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ in der Praxis nicht immer einfach. In Hinblick auf Bedingung (iii) von Satz 29.11 ist es naheliegend, einen Punkt $\tilde{x}$ zu suchen, dass die Voraussetzungen des Satzes mit der Wahl $L := \mathrm{d}f(\tilde{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ und geeigneten $\delta > 0$, $q \in (0,1)$ erfüllt sind.

Eine Alternative bietet das bekannte *Newtonverfahren*, in dem die Abbildung

$$x \mapsto x - \mathrm{d}f(x)^{-1} f(x)$$

iteriert wird. Hier findet quasi eine „Aktualisierung“ der linearen Abbildung „$L = \mathrm{d}f(x)$“ in jedem Schritt statt; man kann zeigen, dass dies zu einer besseren Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens führt. Die Frage der Konvergenzgeschwindigkeit ist für praktische Anwendungen relevant und wird in den Vorlesungen zur Numerik ausführlich diskutiert. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine genauere Betrachtung.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $f(x,y) = (2x + y - \mathrm{e}^{xy} + 1, 2x - y - \frac{\cos(xy)}{5})^T$. Dann ist $f(0) = (0, -\frac{1}{5})^T$. Wir zeigen mit Hilfe von Satz 29.11, dass f in $U_{\frac{1}{4}}(0)$ eine Nullstelle besitzt. Dazu berechnen wir

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - ye^{xy} & 1 - xe^{xy} \\ 2 + \frac{y}{5}\sin(xy) & -1 + \frac{x}{5}\sin(xy) \end{pmatrix} \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und somit

$$J_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $L := \mathrm{d}f(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Gemäß Beispiel 23.5 ist die Operatornorm von L^{-1} als die Wurzel des größten Eigenwerts von $(L^{-1})^* L^{-1}$ gegeben. Dabei ist $(L^{-1})^* L^{-1} = (LL^*)^{-1}$, und LL^* hat die kanonische Darstellungsmatrix

$$J_f(0) J_f(0)^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet für LL^* die Eigenwerte 2 und 8, und somit besitzt die Inverse $(L^{-1})^* L^{-1}$ die Eigenwerte $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$. Es folgt

$$\|L^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{5}{7}$$

Ferner ist

$$J_f(x,y) - J_f(0) = \begin{pmatrix} -ye^{xy} & -xe^{xy} \\ \frac{y}{5}\sin(xy) & \frac{x}{5}\sin(xy) \end{pmatrix} \tag{29.3}$$

Wir verwenden nun folgende Beobachtung: Ist $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit Darstellungsmatrix $(s_{ij})_{ij}$ bzgl. der kanonischen Basis (oder allg. einer Orthonormalbasis), so gilt für die Operatornorm (bzgl. $|\cdot|_2$) wegen Beispiel 23.5:

$$\|S\|^2 \leq \operatorname{Spur}(S^T S) = \sum_{j=1}^N (S^T S)_{jj} = \sum_{i,j=1}^N (S^T)_{ji} s_{ij} = \sum_{i,j=1}^N s_{ij}^2,$$

also

$$\|S\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^N s_{ij}^2}. \tag{29.4}$$

Sei nun $\delta := \frac{1}{4}$. Anwendung von (29.4) auf (29.3) liefert nun für $|(x,y)|_2 \leq \delta$:

$$\|\mathrm{d}f(x,y) - L\| \leq \sqrt{(x^2+y^2)\Big(\mathrm{e}^{2xy} + \frac{\sin^2 xy}{25}\Big)} \leq \delta\sqrt{\mathrm{e} + \frac{1}{25}} \leq \frac{1}{2}$$

und somit

$$\|\mathrm{d}f(x,y) - L\| \leq \frac{q}{\|L^{-1}\|} \qquad \text{für } |(x,y)|_2 \leq \delta \text{ mit } q := \frac{5}{14}.$$

Schließlich ist auch

$$|f(0)|_2 = \frac{1}{5} < \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{5} \leq \frac{\delta(1-q)}{\|L^{-1}\|}.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 29.11 in $0 \in \mathbb{R}^2$ und den obigen Wahlen von δ und q erfüllt, und es folgt die Existenz genau einer Nullstelle von f in $U_{\frac{1}{4}}(0)$, also die Existenz genau einer Lösung in $U_{\frac{1}{4}}(0)$ des nichtlinearen Gleichungssystems

$$2x + y = \mathrm{e}^{xy} - 1, \qquad 2x - y = \frac{1}{5}\cos(xy).$$

(c) Das Argument von (b) liefert sogar für jedes $\lambda \in [0, \frac{1}{5}]$ genau eine Lösung $g(\lambda) \in U_{\frac{1}{4}}(0)$ des Gleichungssystems

$$2x + y = \mathrm{e}^{xy} - 1, \qquad 2x - y = \lambda\cos(xy)$$

Für $\lambda = 0$ ist dabei offensichtlich $0 \in \mathbb{R}^2$ selbst eine Lösung, d.h. es ist $g(0) = 0$. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass für parameterabhängige Gleichungssysteme dieser Form, bei der für einen gewissen Parameterwert (hier: $\lambda = 0$) eine Lösung existiert, unter natürlichen Voraussetzungen die Lösungsmenge lokal in Abhängigkeit des Parameters λ durch eine C^1-Funktion (hier: $\lambda \mapsto g(\lambda)$) geschrieben werden kann.

30. Auflösung von Gleichungen durch implizite Funktionen

Im Folgenden schreiben wir nur noch $|\cdot|$ anstelle von $|\cdot|_2$ für die $2-$Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung und Beispiel 30.1. (a) Viele Probleme und Gleichungen der Analysis hängen von Parametern ab, und man möchte die Abhängigkeit der Lösungen von diesen Parametern untersuchen.

Einfaches Beispiel: Sei $\lambda > 0$ und $P_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $P_\lambda(x) = \lambda x^3 + 2x - 3$. Dann ist $P'_\lambda(x) = 3\lambda x^2 + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist P_λ streng monoton wachsend. Da ferner

$$P_\lambda(x) \to \begin{cases} \infty & \text{für } x \to \infty, \\ -\infty & \text{für } x \to -\infty, \end{cases}$$

folgt, dass P_λ für jedes $\lambda > 0$ genau eine Nullstelle $g(\lambda)$ hat.

Frage: Ist die Abbildung $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto g(\lambda)$, differenzierbar? Falls dies der Fall ist, so kann man ihre Ableitung g' *implizit* berechnen. Sei dazu $U := (0,\infty) \times \mathbb{R}$ und $F \in C^1(U)$ definiert durch $F(\lambda, x) = P_\lambda(x)$. Dann ist

$$\partial_1 F(\lambda, x) = x^3 \quad \text{und} \quad \partial_2 F(\lambda, x) = P'_\lambda(x) = 3\lambda x^2 + 2 \qquad \text{für } (\lambda, x) \in U.$$

Da ferner $F(\lambda, g(\lambda)) = P_\lambda(g(\lambda)) = 0$ für alle $\lambda > 0$ gilt, folgt mit der Kettenregel:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} F(\lambda, g(\lambda)) = J_F(\lambda, g(\lambda)) \begin{pmatrix} 1 \\ g'(\lambda) \end{pmatrix} = \partial_1 F\big(\lambda, g(\lambda)\big) + \partial_2 F(\lambda, g(\lambda)) g'(\lambda),$$

also

$$g'(\lambda) = -\frac{\partial_1 F(\lambda, g(\lambda))}{\partial_2 F(\lambda, g(\lambda))} = -\frac{g(\lambda)^3}{3\lambda g(\lambda)^2 + 2} \qquad \text{für } \lambda > 0.$$

Z.B. ist $g(1) = 1$ und damit $g'(1) = -\frac{1}{5}$. Allerdings haben wir die Differenzierbarkeit von g bisher nicht gezeigt! Diese wird aus Satz 30.3 folgen.

(b) Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit Nullstellenmenge $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

Frage: Können wir die Gleichung $F(x,y) = 0$ nach x oder y auflösen? Mit anderen Worten: Können wir $\mathcal{N}$ als Graph einer Funktion $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ schreiben (evtl. mit C^1 Funktionen?). Im Allgemeinen nicht: Sei z. B. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Dann ist $\mathcal{N} := \{(x,y) \mid |(x,y)| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, und diese Menge ist offensichtlich kein Graph einer Funktion. Allerdings existieren zu jedem $(x,y) \in \mathcal{N}$ Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von x bzw. $V \subseteq \mathbb{R}$ von y und

- eine C^1-Funktion $g\colon U \to V$ mit

$$\mathcal{N} \cap (U \times V) = \operatorname{Graph} g = \big\{(\xi, g(\xi)) \,\big|\, \xi \in U\big\}$$

- **oder** eine C^1-Funktion $g\colon V \to U$ mit

$$\mathcal{N} \cap (U \times V) = \big\{(g(\xi), \xi) \,\big|\, \xi \in V\big\}.$$

Z. B. kann man für $(x, y) = (1, 0)$ die Mengen $U = (0, \infty)$, $V = (-1, 1)$ wählen. Damit ist

$$\mathcal{N} \cap (U \times V) = \big\{(\sqrt{1 - \xi^2}, \xi) \,\big|\, \xi \in (-1, 1)\big\} \qquad \text{(rechter Halbkreis).}$$

Der untenstehende Satz Satz 30.3 liefert ein allgemeines Kriterium für die *lokale* Auflösbarkeit von Gleichungen bzw. Nullstellenmengen. Wir benötigen aber zunächst folgenden Hilfssatz.

Definition und Satz 30.2. *Die Menge* $\mathrm{GL}(N) := \big\{A \in \mathbb{R}^{N \times N} \,\big|\, A \textit{ invertierbar}\big\}$ *ist offen in* $\mathbb{R}^{N \times N}$*, und die Abbildung* $\mathrm{GL}(N) \to \mathrm{GL}(N)$*,* $A \mapsto A^{-1}$ *ist stetig.*

Beweis. Die Determinante

$$\det\colon \mathbb{R}^{N \times N} \to \mathbb{R}, \qquad \det A = \sum_{\pi \in S_N} a_{1\pi_1} \cdots a_{N\pi_N} \operatorname{sign} \pi \quad \text{für } A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

ist eine Polynomfunktion, also stetig nach Beispiel 22.4. Somit ist $\mathrm{GL}(N)$ nach Satz 22.8 offen in $\mathbb{R}^{N \times N}$ als Urbild von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter det. Weiterhin gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(N)$ gemäß der Cramerschen Regel aus der linearen Algebra:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T \qquad \text{mit } \tilde{A} = \Big((-1)^{i+j} A_{ij}\Big)_{ij},$$

wobei A_{ij} die Determinante der Matrix ist, welche aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Aus der Stetigkeit der Determinante folgt also auch die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathrm{GL}(N) \to \mathrm{GL}(N), \qquad A \mapsto A^{-1}. \qquad \square$$

Satz 30.3 (über implizite Funktionen)**.** *Seien* $k, m \in \mathbb{N}$ *und* $N = k + m$*,* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen,* $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$*. Wir schreiben*

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^N \quad \textit{mit} \quad x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \ \textit{sowie}$$

$$J_F(z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(z), \frac{\partial F}{\partial y}(z)\right) \in \mathbb{R}^{m \times N} \qquad \textit{mit}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

für $z \in U$.

Dann gilt: *Ist $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ mit $F(z_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \in \mathrm{GL}(m)$, so existieren $\varepsilon, \delta > 0$ und genau eine Abbildung $g\colon U_\varepsilon(x_0) \to U_\delta(y_0)$ mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Ferner ist g stetig differenzierbar, und es gilt*

$$J_g(x_0) \;=\; -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(z_0)\Big)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) \;\in\; \mathbb{R}^{m\times k}. \tag{30.1}$$

Beweis. Sei $z \in U$. Wir beachten zunächst, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) \in \mathbb{R}^{m\times k} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(z) \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

die (kanonischen) Darstellungsmatrizen zu den linearen Abbildungen

$$\mathrm{d}_x F(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m), \qquad \mathrm{d}_x F(z)v := \mathrm{d}F(z)(v, 0) \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^k$$

bzw.

$$\mathrm{d}_y F(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \qquad \mathrm{d}_y F(z)w := \mathrm{d}F(z)(0, w) \quad \text{für } w \in \mathbb{R}^m,$$

sind. Nach Voraussetzung ist $\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \in \mathrm{GL}(m)$ und somit

$$L := \mathrm{d}_y F(z_0) \quad \in \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$$

invertierbar. Aufgrund der Stetigkeit von F und dF und Definition und Satz 30.2 können wir dann $\varepsilon > 0, \delta > 0$ so klein wählen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0) \subseteq U;\\
&|F(x, y_0)| < \frac{\delta}{2\|L^{-1}\|} \text{ für } x \in U_\varepsilon(x_0);\\
&\|\mathrm{d}_y F(x, y) - L\| \le \frac{1}{2\|L^{-1}\|} \text{ für } x \in U_\varepsilon(x_0), y \in B_\delta(y_0).
\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Satz 29.11 mit $q = \frac{1}{2}$ folgt, dass für festes $x \in U_\varepsilon(x_0)$ die Abbildung

$$\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in U\} \to \mathbb{R}^m, \qquad y \mapsto F(x, y)$$

genau eine Nullstelle $g(x) \in U_\delta(y_0)$ hat, welche als Fixpunkt der $\frac{1}{2}$-Kontraktion

$$T_x\colon B_\delta(y_0) \to B_\delta(y_0), \qquad T_x(y) := y - L^{-1}F(x, y)$$

gegeben ist. Insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Wir zeigen nun, dass g in x_0 differenzierbar ist und (30.1) erfüllt. Sei dazu $K := \mathrm{d}_x F(z_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Wir müssen zeigen:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - y_0 + L^{-1}K[x - x_0]}{|x - x_0|} = 0 \tag{30.2}$$

(dann existiert $\mathrm{d}g(x_0) = -L^{-1}K$, und (30.1) folgt durch Übergang zu Darstellungsmatrizen). Wegen $F(z_0) = 0$ und $\mathrm{d}F(z_0)(v, w) = Kv + Lw$ für $v \in \mathbb{R}^k$, $w \in \mathbb{R}^m$ gilt dabei

$$F(x,y) = K[x - x_0] + L[y - y_0] + h(x,y)\,(|x - x_0| + |y - y_0|) \qquad \text{für } (x,y) \in U$$

mit einer stetigen Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $h(x_0, y_0) = 0$. Für $x \in U_\varepsilon(x_0)$ ist insbesondere

$$0 = F(x, g(x)) = K[x - x_0] + L[g(x) - y_0] + h(x, g(x))\,(|x - x_0| + |g(x) - y_0|)$$

also

$$|g(x) - y_0 + L^{-1}K[x - x_0]| \le \|L^{-1}\| |h(x, g(x))|\,(|x - x_0| + |g(x) - y_0|). \tag{30.3}$$

Ferner gilt aufgrund der $\frac{1}{2}$-Kontraktivität

$$\begin{aligned}|g(x) - y_0| = |T_x(g(x)) - T_{x_0}(y_0)| &\le |T_x(g(x)) - T_x(y_0)| + |T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)| \\ &\le \frac{1}{2}|g(x) - y_0| + |T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)|\end{aligned}$$

und somit, nach Definition von T,

$$\begin{aligned}&|g(x) - y_0| \le 2|T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)| \le 2\|L^{-1}\| |F(x, y_0) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{=0}| \\ &\le 2\|L^{-1}\|(|K[x - x_0]| + |h(x, y_0)||x - x_0|) \le C_1|x - x_0|\end{aligned} \tag{30.4}$$

für $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ mit einer Konstanten $C_1 > 0$. Insbesondere folgt $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, also auch $\lim_{x \to x_0} h(x, g(x)) = h(x_0, y_0) = 0$. Zusammen mit (30.3) und (30.4) folgt

$$\frac{|g(x) - y_0 + L^{-1}K[x - x_0]|}{|x - x_0|} \le \|L^{-1}\| |h(x, g(x))|\,(1 + C_1) \to 0 \qquad \text{für } x \to x_0,$$

wie in (30.2) behauptet.

Schluss des Beweises: Da g in x_0 differenzierbar und somit stetig ist, können wir wegen Definition und Satz 30.2 nach eventueller Verkleinerung von ε annehmen, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ invertierbar ist. Für jedes solche x sind dann die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $(x, g(x))$ anstelle von z_0 wieder erfüllt, und aus den bisher Bewiesenen folgt – unter Berücksichtigung der punktweisen Eindeutigkeit der Lösungsfunktion g – dann die Differenzierbarkeit von g in x mit

$$J_g(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

Gemäß Satz und Definition 26.7 und Definition und Satz 30.2 liefert diese Darstellung die Stetigkeit von $\mathrm{d}g$. □

Bemerkungen und Beispiele 30.4. (a) Man kann die (lokale) Eindeutigkeit von g in Satz 30.3 auch so formulieren: Für $(x,y) \in U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)$ gilt

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = g(x).$$

Mit anderen Worten: Die Nullstellenmenge von F in $U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)$ ist der Graph einer eindeutig bestimmten Abbildung $g\colon U_\varepsilon(x_0) \to U_\delta(y_0)$.

(b) *Fortsetzung von Bemerkung und Beispiel 30.1*(b)*:* Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und $\mathcal{N} = \{(x,y) \mid |(x,y)| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei ferner $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{N}$ mit $y_0 \neq 0$. Dann ist $\partial_2 F(z_0) = 2y_0 \neq 0$. Also existieren nach Satz 30.3 Umgebungen $U_\varepsilon(x_0), U_\delta(y_0)$ und eine C^1-Abbildung $g\colon U_\varepsilon(x_0) \to U_\delta(y_0)$ derart, dass gilt:

$$\mathcal{N} \cap (U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)) = \operatorname{Graph} g = \Big\{ \big(\xi, g(\xi)\big) \;\Big|\; \xi \in U_\varepsilon(x_0) \Big\}.$$

In diesem speziellen Fall ist $g(\xi) = \operatorname{sign}(y_0)\sqrt{1-\xi^2}$ für $\xi \in U_\varepsilon(x_0)$.

(c) Wir betrachten das (unterbestimmte) nichtlineare Gleichungssystem

$$(GS) \qquad \left\{ \begin{matrix} 3x^2 - y^2 + u^3 + v^2 = 4 \\ 2x^2 - y^3 + u^2 - v = 1 \end{matrix} \right\} \qquad (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4.$$

Offensichtlich ist $z_0 = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ eine Lösung. Kann man (GS) lokal bei z_0 durch eine C^1-Abbildung nach (u,v) auflösen? Um dies zu klären, schreiben wir (GS) in der Form $F(x,y,u,v) = \binom{0}{0}$ mit

$$F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2), \qquad F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 + u^3 + v^2 - 4 \\ 2x^2 - y^3 + u^2 - v - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $F(z_0) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(z) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(z) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 2v \\ 2u & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } z = (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4,$$

also $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(z_0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2)$ mit Determinante -7. Nach Satz 30.3 existieren also $\varepsilon, \delta > 0$ und eine C^1-Abbildung $g\colon U_\varepsilon(1,1) \to U_\delta(1,1)$ derart, dass für $z = (x,y,u,v) \in U_\varepsilon(1,1) \times U_\delta(1,1)$ gilt:

$$F(z) = 0, \text{ (d. h. } z \text{ löst (GS))} \quad \Longleftrightarrow \quad (u,v) = g(x,y).$$

Wir bestimmen nun $J_g(1,1)$: Es ist $\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(z_0)\right)^{-1} = -\frac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(z_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ 4x & -3y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{z_0} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Also folgt mit Satz 30.3:

$$J_g(1,1) = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Frage: Kann man (GS) lokal bei z_0 auch nach anderen Variablen auflösen, z. B. nach (x,y)? Dies kann man mit Satz 30.3 beantworten, wenn man die Koordinaten geeignet umstellt. Relevant ist dann die Matrix $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Im Kapitel Kapitel 32 geben wir eine allgemeine Formulierung von Satz 30.3 an, welche Koordinatenumstellungen berücksichtigt.

31. Lokale Diffeomorphie

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{1}_N$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{N\times N}$ für $N \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 31.1. (a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und sei $f\colon U \to V$ eine C^1-Abbildung, die bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Inverse $f^{-1}\colon V \to U$ besitzt. Differenzieren der Gleichungen $\mathrm{id}_U = f^{-1} \circ f$ und $\mathrm{id}_V = f \circ f^{-1}$ liefert nach Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_N &= J_{\mathrm{id}_U}(x) = J_{f^{-1}}\big(f(x)\big)\, J_f(x) \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und}\\
\mathbb{1}_m &= J_{\mathrm{id}_V}(y) = J_f\big(f^{-1}(y)\big)\, J_{f^{-1}}(y) \qquad \text{für alle } y \in V, \text{ d.h.}\\
\mathbb{1}_m &= J_f(x)\, J_{f^{-1}}\big(f(x)\big) \qquad \text{für alle } x \in U.
\end{aligned}$$

Für ein $x \in U$ ist demnach $\mathrm{d}f(x)$ injektiv, also $N \le m$, und $\mathrm{d}^{-1}(f(x))$ ist injektiv, also $m \le N$. Es folgt $m = N$ und $J_{f^{-1}}\big(f(x)\big) = \big(J_f(x)\big)^{-1}$ für alle $x \in U$.

(b) Im eindimensionalen Fall gilt speziell (vgl. Satz 11.6 und Satz 14.9): Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^1(U)$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, so ist $V := f(U)$ offen und $f\colon U \to V$ hat eine C^1-Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$ mit $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

(c) Die obigen Überlegungen motivieren folgende Frage: Ist im mehrdimensionalen Fall $m = N > 1$ die Invertierbarkeit der Matrix $J_f(x_0)$ in einem Punkt $x_0 \in U$ hinreichend für die „lokale Invertierbarkeit“ von f in der Nähe des Punktes x_0?

Definition 31.2. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Eine C^1-Abbildung $f\colon U \to V$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und $f^{-1}\colon V \to U$ ebenfalls eine C^1-Abbildung ist. Wir schreiben:$\mathrm{Diff}(U,V) = \big\{ f\colon U \to V \;\big|\; f \text{ Diffeomorphismus} \big\}$.

Beispiel 31.3. (a) Sei $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ affin linear, also gegeben durch $f(x) = Tx + c$, wobei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ invertierbar und $c \in \mathbb{R}^N$ sei. Dann ist $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ mit $f^{-1}(y) = T^{-1}(y - c)$ für $y \in \mathbb{R}^N$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ ist eine bijektive C^1-Abbildung mit $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \ge 0,\\ -\sqrt[3]{|y|} & y < 0. \end{cases}$$

f^{-1} ist stetig, aber in 0 nicht differenzierbar. Also ist f ein Homöomorphismus, aber kein Diffeomorphismus.

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x$ ist ein C^1-Diffeomorphismus nach Bemerkung 31.1(b).

Bemerkung 31.4. Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in \operatorname{Diff}(U, V)$, $g \in \operatorname{Diff}(V, W)$. Dann gilt:

(a) $f^{-1} \in \operatorname{Diff}(V, U)$. Dabei ist $\mathrm{d}f^{-1}\big(f(x)\big) = \big[\mathrm{d}f(x)\big]^{-1}$ und $J_{f^{-1}}\big(f(x)\big) = \big[J_f(x)\big]^{-1}$ für alle $x \in U$ gemäß Bemerkung 31.1(a).

(b) $g \circ f \in \operatorname{Diff}(U, W)$.

Satz 31.5 (lokale Diffeomorphie bzw. von der inversen Funktion)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ und $a \in U$ mit $J_f(a) \in \mathrm{GL}(N)$. Dann existieren offene Umgebungen $\tilde{U} \subseteq U$ von a und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ von $f(a)$ derart, dass $f|_{\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$F \colon \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}^N, \qquad F(x, y) = f(y) - x.$$

und wenden den Satz über implizite Funktion Satz 30.3 auf F im Punkt $z_0 = (f(a), a)$ an. Dies ist möglich, da

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = J_f(a) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

nach Voraussetzung invertierbar ist. Somit existieren $\varepsilon, \delta > 0$ sowie eine Abbildung $g \colon U_\varepsilon(f(a)) \to U_\delta(a)$ derart, dass für $(x, y) \in U_\varepsilon(f(a)) \times U_\delta(a)$ gilt:

$$(31.1) \qquad x = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = g(x).$$

Ferner ist g stetig differenzierbar. Da f stetig ist, ist $\tilde{U} := f^{-1}\Big(U_\varepsilon(f(a))\Big) \cap U_\delta(a)$ eine offene Teilmenge von U, und wegen (31.1) ist auch

$$V := f(\tilde{U}) = g^{-1}(\tilde{U}) \subseteq U_\varepsilon(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^N$$

offen. Aus (31.1) folgt nun, dass $f|_{\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to V$ bijektiv ist mit Inverser $g|_V \colon V \to \tilde{U}$. Da f und g stetig differenzierbar sind, folgt $f|_{\tilde{U}} \in \operatorname{Diff}(\tilde{U}, V)$, wie behauptet. □

Korollar 31.6. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ eine Abbildung mit* $\det J_f(x) \neq 0$ *für alle $x \in U$, so gilt:*

(a) *$f(U) \subseteq \mathbb{R}^N$ ist offen.*

(b) *Ist f injektiv, so ist $f \in \operatorname{Diff}\big(U, f(U)\big)$.*

Beweis. Sei $y \in f(U)$ beliebig und $x \in U$ mit $f(x) = y$. Nach Satz 31.5 existieren offene Umgebungen $\tilde{U} \subseteq U$ von x und $V \subseteq \mathbb{R}^N$ von y derart, dass $f|_{\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $V = f(\tilde{U}) \subseteq f(U)$. Es folgt, dass $f(U)$ in $\mathbb{R}^N$ offen ist.

Ist zudem f injektiv mit Inverser $f^{-1} \colon f(U) \to U$, so ist $f^{-1}|_V = \Big(f|_{\tilde{U}}\Big)^{-1}$ stetig differenzierbar. Da $y \in f(U)$ beliebig gewählt war, folgt die stetige Differenzierbarkeit von f^{-1}, und somit ist $f \in \operatorname{Diff}(U, f(U))$. □

Beispiel 31.7. (Polarkoordinaten, vgl. Analysis I, Bemerkung 12.10) Sei $U := (0,\ \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f \in C^1(U,\ \mathbb{R}^2)$ definiert durch $f(r, \varphi) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für } (r, \varphi) \in U.$$

Also ist $\det J_f(r, \varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r > 0$ und damit $J_f(r, \varphi)$ invertierbar für alle $(r, \varphi) \in U$. Somit sind die Sätze Satz 31.5 und Korollar 31.6(a) auf f anwendbar. Allerdings ist f nicht injektiv, da

$$f(r, \varphi + k2\pi) = f(r, \varphi) \qquad \text{für alle } (r, \varphi) \in U,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten nun die offenen Teilmengen

$$U' := (0,\ \infty) \times (-\pi,\ \pi) \subseteq U, \qquad V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}\ \subseteq\ \mathbb{R}^2$$

und zeigen:

$$f|_{U'} \in \mathrm{Diff}(U', V). \tag{31.2}$$

Dazu beachten wir, dass man nach Analysis I, Bemerkung 12.10 jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in eindeutiger Weise als $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ schreiben kann. Durch Übergang zu Real-und Imaginärteil folgt, dass man jeden Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in eindeutiger Weise als $(x, y) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = f(r, \varphi)$ schreiben kann mit $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi]$. Da ferner $f\big((0, \infty) \times \{\pi\}\big) = \{(x, 0) \mid x < 0\}$ ist, bildet f also U' bijektiv auf V ab. Mit Korollar 31.6(b) folgt (31.2). Die Abbildung $P := f|_{U'}$ heißt *Polarkoordinatenabbildung.*

Wie berechnet man nun die Jacobimatrix von P^{-1} z. B. in $(1, 1) \in V$? Es ist $(1, 1) = P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, wobei $J_P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$. Also gilt nach Bemerkung 31.1 bzw. Bemerkung 31.4:

$$J_{P^{-1}}(1, 1) = \left(J_P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

32. Reguläre Punkte und reguläre Werte

Definition 32.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$.

(a) $z \in U$ heißt *regulärer Punkt* von f, falls $\mathrm{d}f(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ surjektiv ist.

(b) $w \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert* von f, falls die Menge $f^{-1}(w) \subseteq U$ nur aus regulären Punkten von f besteht.

(c) Nichtreguläre Punkte bzw. Werte von f nennt man *singulär* oder *kritisch.*

Bemerkung 32.2. In der Situation von Definition 32.1 gilt für $z \in U$, $w \in \mathbb{R}^m$:

(a) z regulärer Punkt von f.

$\iff$ rang $J_f(z) = m$.

$\iff$ die Zeilen von $J_f(z)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^N$.

$\iff$ $J_f(z)$ hat m linear unabhängige Spalten.

Ist z ein regulärer unkt von f, dann muss also insbesondere gelten $m \leq N$.

(b) Ist $w \notin f(U)$ so ist w ein regulärer Wert von f.

(c) Ist $m = 1$, so ist z regulärer Punkt von f genau dann, wenn $\nabla f(z) \neq 0$ ist.

Beispiel 32.3. (a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$. Dann gilt:

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad (x, y) = 0.$$

Also ist $0 \in \mathbb{R}^2$ der einzige kritische Punkt von f und somit $1 = f(0)$ ist der einzige kritische Wert von f. Man beachte aber: $(1, 1)$ ist regulärer Punkt von f, aber $f(1, 1) = 1$ ist **kein** regulärer Wert von f!

Zur Veranschaulichung ist es hilfreich, die Mengen $f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^2$ (sogenannte Niveaumengen von f) für $c > 1$, $c = 1$ und $c < 1$ in der Nähe des Nullpunkts im $\mathbb{R}^2$ zu skizzieren.

Man kann generell zeigen, dass sich die topologische Gestalt der Niveaumengen von f höchstens bei Überschreitung von kritischen Werten ändern kann.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $f(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ (x-1)^2+y^2+z^2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt:

$$J_f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y & z \end{pmatrix} \text{ hat Rang 2} \quad \Longleftrightarrow \quad y \neq 0 \text{ oder } z \neq 0$$

Also ist $\big\{(x,0,0) \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge der kritischen Punkte und

$$\big\{(x^2,(x-1)^2)^T \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\}$$

die Menge der kritischen Werte von f.

Seien nun $a, b > 0$. Geometrisch ist $f^{-1}\Big(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\Big)$ der Schnitt einer Kugeloberfläche *(sogenannte Sphäre)* mit Radius $\sqrt{a}$ um 0 mit einer Sphäre mit Radius $\sqrt{b}$ um $(1,0,0)$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist kritischer Wert von } f \\ \Longleftrightarrow\quad & \text{es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } a = x^2 \text{ und } b = (x-1)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & \sqrt{b} = \sqrt{a} - 1 \text{ oder } \sqrt{b} = 1 - \sqrt{a} \text{ oder } \sqrt{b} = 1 + \sqrt{a} \\ \Longleftrightarrow\quad & \text{die beiden Sphären berühren sich } \textit{genau in einem Punkt} \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung kann man z.B. die Lage der Sphären in den Fällen

- $\sqrt{a} = 2,\ \sqrt{b} = 1,$
- $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \frac{1}{2},$
- $\sqrt{a} = 1,\ \sqrt{b} = 2.$

skizzieren.

Wir haben in Beispiel (a) gesehen, dass im Fall des kritischen Punktes 0 der Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ das Urbild $f^{-1}(1)$ des zugehörigen Wertes $1 = f(0)$ aus zwei (senkrechten) Geraden besteht, welche sich in diesem kritischen Punkt schneiden. Somit lässt sich dieses Urbild nicht lokal um 0 als Graph einer Funktion schreiben. Anhand der folgenden Variante des Satzes von der impliziten Funktion sehen wir andererseits, sich dieses Urbild bei regulären Punkten lokal als Graph schreiben lässt, wenn man die Koordinaten geeignet umnummeriert.

Satz 32.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit $m < N$ und $z \in U$ ein regulärer Punkt von f. Sei ferner $k := N - m$ und $w := f(z)$. Dann existieren offene Teilmengen $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V \subseteq U$ mit $z \in V$, eine Abbildung $g \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^m)$ und eine Koordinatenpermutation $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ derart, dass gilt:*

$$f^{-1}(w) \cap V = \big\{T\big(x, g(x)\big) \;\big|\; x \in \tilde{U}\big\}$$

Als Koordinationpermutation sei dabei ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet, welches für eine geeignete Permutation $\pi \in S_N$ durch $Te_j = e_{\pi_j}$, $j = 1, \dots, N$ gegeben ist.

Insbesondere lässt sich Urbild $f^{-1}(w)$ eines regulären Wertes $w \in f(U)$ von f lässt sich lokal als Graph einer eindeutigen C^1-Abbildung schreiben, wenn man die Koordinaten geeignet permutiert.

Beweis. Da z ein regulärer Punkt von f ist, sind für eine geeignete Permutation $\pi \in S_N$ die Vektoren $\partial_{\pi_{k+1}} f(z), \ldots, \partial_{\pi_N} f(z) \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ die zu π gehörige Koordinatenpermutation, und sei $U_0 := T^{-1}(U)$ sowie $z_0 := T^{-1}z \in U_0$. Sei ferner $F \in C^1(U_0, \mathbb{R}^m)$ definiert durch $F(u) = f(Tu) - w$. Dann gilt $F(z_0) = 0$ und (mit Kettenregel)

$$\partial_j F(z_0) = \mathrm{d}F(z_0)e_j = \mathrm{d}f(Tz_0)Te_j = \mathrm{d}f(z)e_{\pi(j)} = \partial_{\pi(j)} f(z), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Nach Voraussetzung sind also die Vektoren

$$\partial_{k+1} F(z_0)\,,\ \ldots\,,\ \partial_N F(z_0)\ \in \mathbb{R}^m$$

linear unabhängig. Wir schreiben nun wie in Satz 30.3 die Elemente von U_0 als Tupel (x, y) mit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ und $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, insbesondere sei $z_0 = (x_0, y_0)$. Gemäß der Notation von Satz 30.3 ist dann $\frac{\partial F}{\partial y}(z_0)$ die von den Spalten $\partial_{k+1} F(z_0)\,,\ \ldots\,,\ \partial_N F(z_0)$ gebildete Matrix, und diese ist invertierbar. Nach Satz 30.3 existieren also $\varepsilon, \delta > 0$ und eine C^1-Abbildung $g \colon U_\varepsilon(x_0) \to U_\delta(y_0)$ mit

$$F^{-1}(0) \cap [U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)] = \{(x, g(x)) \mid x \in U_\varepsilon(x_0)\}. \tag{32.1}$$

Wir setzen $V := T[U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)]$ und $\tilde{U} := U_\varepsilon(x_0)$. Dann ist V offen, da $T \in \mathrm{GL}(N)$ ist. Beachtet man nun, dass $T(F^{-1}(0)) = f^{-1}(w)$ gilt, so folgt aus (32.1)

$$f^{-1}(w) \cap V = T(F^{-1}(0) \cap [U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0)]) = \big\{T(x, g(x)) \bigm| x \in \tilde{U}\big\},$$

wie behauptet. □

Bemerkung 32.5. Nachtrag: Da in Definition und Satz 30.2 die Inverse einer Matrix A als Koordinaten rationale Funktionen der Koordinaten von A hat, ist die Abbildung $\mathrm{GL}(N) \to \mathrm{GL}(N)$, $A \mapsto A^{-1}$ sogar beliebig oft differenzierbar.

Korollar 32.6. *Ist zusätzlich zu den Bedingungen in Satz 30.3 F sogar eine C^k-Funktion für ein $k \geq 2$, so ist die implizit definierte Funktion g auch eine C^k-Funktion. Analoge Folgerungen gelten in Satz 31.5 und Satz 32.4.*

Beweis. In Satz 30.3 setzen wir $\psi(x) := (x, g(x))^T \in \mathbb{R}^N$. Dann folgt nach der Kettenregel aus

$$F \circ \psi = 0 \qquad \text{in } U_\varepsilon(x_0)$$

die Beziehung

$$\mathrm{d}F(x, g(x))\mathrm{d}\psi(x),$$

also

$$\begin{aligned} 0 = J_f(x, g(x)) \cdot J_\psi(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k \\ J_g(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot J_g(x) \end{aligned}$$

und daher

$$J_g(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

Hier sind jetzt die Koordinaten von $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ C^{k-1}-Funktionen, und g ist eine C^1-Funktion. Wegen Bemerkung 32.5 ist also auch J_g eine C^1-Funktion, also g eine C^2-Funktion. Induktiv schließt man jetzt, dass g eine C^k-Funktion ist. $\square$

Bemerkung 32.7. Um höhere Ableitungen einer implizit gegebenen Funktion zu berechnen, ist es am einfachsten, wie folgt vorzugehen: Lösen wir zum Beispiel $f(x, y, z) = 0$ nach y durch eine Funktion g auf, dann leiten wir die Gleichung

$$f(x, g(x, z), z) = 0$$

nach x ab und erhalten (mit $f_x \coloneqq \partial_x f$ usw.):

$$f_x(x, g(x, z), z) + f_y(x, g(x, z), z) g_x(x, z) = 0, \tag{32.2}$$

kurz $f_x + f_y g_x = 0$, also $g_x = -f_x/f_y$. Analog erhält man $g_z = -f_z/f_y$. Um höhere Ableitungen zu erhalten, können wir entweder diese Ausdrücke direkt ableiten oder (32.2) weiter differenzieren und dann nach der gewünschten Ableitung von g auflösen.

33. Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen und Untermannigfaltigkeiten

Bemerkung und Beispiel 33.1. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(V)$. Oft interessiert man sich für die Extremwerte von $f|_M$, wobei M eine gegebene Teilmenge von V ist. Man sucht also Extrema x von f „unter der Nebenbedingung $x \in M$“.

Konkretes Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 \right\} \qquad (\textit{Ellipsoid})$$

und $q = (0, 0, 1)$. Da M abgeschlossen ist, existiert ein Punkt $p \in M$, der den Abstand zu q minimiert; es gilt also $|p - q|_2 = \operatorname{dist}(q, M)$. Wie berechnet man einen solchen Punkt p?

Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch $f(v) = |v - q|_2^2$, so ist p ein globales Minimum von $f|_M$. Offensichtlich ist p aber kein kritischer Punkt von f, denn der einzige kritische Punkt von f ist q selbst. Welche Bedingung erfüllt $\nabla f(p)$ dann? Dies werden wir im Folgenden klären.

Definition 33.2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Menge und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt *Tangentialvektor* von M in p, falls es $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^N$ gibt mit $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Satz 33.3. *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $M \subseteq V$, $f \in C^1(V)$ und $p \in M$ ein lokales Extremum von $f|_M$. Dann steht $\nabla f(p)$ senkrecht auf allen Tangentialvektoren von M in p, d.h. für jeden Tangentialvektor v von M in p gilt $\langle \nabla f(p), v\rangle = 0$.*

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^N$ ein Tangentialvektor von M in p und $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Nach Voraussetzung ist 0 ein lokales Extremum der Funktion $f \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Also ist

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = \langle \nabla f(p), v\rangle.$$

$\square$

Definition und Bemerkung 33.4. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(V)$. Sei ferner $M \subseteq V$ und $p \in M$.

(a) Wir nennen $p \in M$ einen *kritischen Punkt* von $f|_M$, falls $\langle \nabla f(p), v\rangle = 0$ für alle Tangentialvektoren v von M in p.

(b) Nach Satz 33.3 ist jedes lokale Extremum p von $f|_M$ ein kritischer Punkt von $f|_M$. Für allgemeine Mengen M und Punkte $p \in M$ ist die Menge aller Tangentialvektoren von M in p aber ein kompliziertes Objekt. Daher betrachten wir im Folgenden spezielle Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^N$.

Definition 33.5. Sei $0 < k \leq N$ und $M \subseteq \mathbb{R}^N$. M heißt k-*dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^N$, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ und ein $\psi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ gibt mit:

(a) $p \in V$.

(b) ψ bildet U bijektiv auf $M \cap V$ ab.

(c) $\psi^{-1}\colon M \cap V \to U$ ist stetig.

(d) $d\psi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ ist injektiv für alle $x \in U$.

Erfüllt ψ die Bedingungen (a)–(d), so nennt man $\psi\colon U \to M \cap V$ $\big($oder genauer das Tripel $(U, V, \psi)\big)$ eine *lokale Parametrisierung* von M um p. Die Inverse $\psi^{-1}\colon M \cap V \to U$ heißt *Karte von M um p.*

Kurzzusammenfassung dieser Bedingungen: „k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten sehen lokal ungefähr so aus wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$".

Beispiel 33.6. Sei $0 < k \leq N - 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^1\big(U,\ \mathbb{R}^{N-k}\big)$.

Dann ist $M := \operatorname{Graph} f = \big\{\big(x,\ f(x)\big) \,\big|\, x \in U\big\}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Beweis. Sei $V = \mathbb{R}^N$ und $\psi \in C^1\big(U,\ \mathbb{R}^N\big)$ definiert durch $\psi(x) = \big(x,\ f(x)\big)^T$.

Dann ist $\psi\colon U \to M = M \cap V$ bijektiv mit $\psi^{-1}\colon M \to U$ gegeben durch $\psi^{-1}(y) = (y_1, \ldots, y_k)$; insbesondere ist ψ^{-1} stetig. Ferner hat $J_\psi(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k \\ J_f(x) \end{pmatrix}$ Rang k für alle $x \in U$, d.h. $d\psi(x)$ ist injektiv für alle $x \in U$. Somit erfüllt ψ die Bedingungen (a)–(d) *für alle $p \in M$.* $\square$

Bemerkung: In dem obigen Fall wird $M = \operatorname{Graph} f$ durch nur ein ψ *global parametrisiert.*

Satz 33.7 (vom regulären Wert)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit $m < N$ und $w \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f. Dann ist $M := f^{-1}(w)$ eine $(N-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.*

Beweis. Sei $k = N - m$, und sei $p \in M$. Nach Satz 32.4 existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$, eine offene Umgebung $V \subseteq D$ von p sowie Abbildungen $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, T invertierbar, mit

$$M \cap V = \big\{T\big(x, g(x)\big) \,\big|\, x \in U\big\}.$$

Wir betrachten nun $h \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ definiert durch $h(x) = (x, g(x))$ und $\psi = T \circ h \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$. Dann ist $\psi\colon U \to M \cap V$ eine Bijektion mit $\psi^{-1}\colon M \cap V \to U$ gegeben durch

$\psi^{-1}(y) = P(T^{-1}(y))$, wobei $P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Komponenten sei. Also ist Ψ^{-1} stetig.

Schließlich ist $d\psi(x) = T\mathrm{d}h(x)$ für alle $x \in U$. Wie im Beweis von Beispiel 33.6 folgt zudem, dass für alle $x \in U$ die lineare Abbildung $\mathrm{d}h(x)$ und somit auch $d\psi(x)$ injektiv ist. Also sind die Bedingungen (a)–(d) aus Definition 33.5 erfüllt, d.h. ψ ist eine lokale Parametrisierung von M um p. $\square$

Beispiel 33.8. Wir betrachten $N \geq 2$ und $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|_2^2$, und die sogenannte *Einheitssphäre* $S^{N-1} := f^{-1}(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, |x|_2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Da $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in S^{N-1}$, ist 1 ein regulärer Wert von f. Somit ist S^{N-1} nach Satz 33.7 eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Es gibt viele Möglichkeiten, S^{N-1} lokal zu parametrisieren, z.B. Graphen über offenen Teilmengen von $N-1$-dimensionalen Unterräumen. Dabei bräuchte man allerdings mindestens $2N$ Karten. Die folgende *stereographische Projektion* liefert lokale Parametrisierungen mit lediglich 2 Karten: Sei dazu $U := \mathbb{R}^{N-1}$ und $V_\pm = \mathbb{R}^N \setminus \{\pm e_N\}$, wobei $e_N := (0, \ldots, 0, 1)$ der N-te Einheitsvektor sei. Dann ist $S^{N-1} = (S^{N-1} \cap V_+) \cup (S^{N-1} \cap V_-)$. Wir definieren

$$\psi, \varphi\colon U \to \mathbb{R}^N, \qquad \begin{cases} \psi(x) &= \dfrac{1}{1+|x|_2^2} \begin{pmatrix} 2x \\ |x|_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \\[2ex] \varphi(x) &= \dfrac{1}{1+|x|_2^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 - |x|_2^2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dann gilt:

- Ist $p \in S^{N-1} \setminus \{e_N\}$, so ist $\psi\colon U \to S^{N-1} \cap V_+$ eine lokale Parametrisierung um p
- Ist $p \in S^{N-1} \setminus \{-e_N\}$, so ist $\varphi\colon U \to S^{N-1} \cap V_-$ eine lokale Parametrisierung um p

Beweis: Übung.

Definition und Satz 33.9. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Menge. Wir setzen:*

(a)
$$\operatorname{span} B := \bigcap_{\substack{V \leq \mathbb{R}^N \\ B \subseteq V}} V$$

(Erzeugnis oder lineare Hülle). *Hier bedeutet „$V \leq \mathbb{R}^N$“, dass V ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^N$ ist.*

(b) $B^\perp := \left\{v \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \langle v, b\rangle = 0 \text{ *für alle* } b \in B\right\}$ (Orthogonalkomplement von B)

Dann gilt: $B^\perp$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^N$ mit $\mathbb{R}^N = \operatorname{span} B \oplus B^\perp$.

Beweis. Man sieht leicht, dass $B^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^N$ ist. Ferner ist $W := \operatorname{span} B$ der lineare Unterraum aller Linearkombinationen von Elementen aus B, und daraus folgert man leicht die Gleichheit $B^\perp = W^\perp$. In der linearen Algebra wird gezeigt, dass $\mathbb{R}^N = W \oplus W^\perp$ gilt. $\square$

Definition 33.10. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann setzen wir:

(a) $T_pM := \{v \in \mathbb{R}^N \mid v \text{ Tangentialvektor von } M \text{ in } p\}$ (*Tangentialraum von M in p*)

(b) $N_pM := (T_pM)^\perp$ (*Normalraum von M in p*).

Hilfssatz 33.11. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\psi\colon U \to M \cap V$ eine lokale Parametrisierung um p. Dann existiert eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von p derart, dass sich $\psi^{-1}\colon M \cap W \to U$ zu einer C^1-Abbildung $W \to U$ fortsetzen lässt.*

Beweis. Sei $a := \psi^{-1}(p) \in U$. Da $d\psi(a)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ injektiv ist, können wir $\mathbb{R}^N$ als direkte Summe $\mathbb{R}^N = \operatorname{Bild} \mathrm{d}\psi(a) \oplus \mathcal{N}$ mit einem $N-k$-dimensionalen Unterraum $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ schreiben. Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_{N-k}$ von $\mathcal{N}$ und betrachten die C^1-Abbildung

$$g\colon U \times \mathbb{R}^{N-k} \to \mathbb{R}^N, \qquad g(x,t) := \psi(x) + \sum_{j=1}^{N-k} t_j v_j \qquad \text{für } t = (t_1, \ldots, t_{N-k}) \in \mathbb{R}^{N-k}.$$

Für $(x,t) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$ ist dann

$$\mathrm{d}g(x,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \qquad \mathrm{d}g(x,t)(y,s) = \mathrm{d}\psi(x)y + \sum_{j=1}^{N-k} s_j v_j \text{ für } (y,s) \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$$

und somit $\operatorname{Bild} \mathrm{d}g(x,t) = \operatorname{Bild} \mathrm{d}\psi(x) + \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$. Im Punkt $\tilde{a} := (a,0) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$ ist nach Konstruktion $\operatorname{Bild} \mathrm{d}g(\tilde{a}) = \operatorname{Bild} d\psi(a) \oplus \mathcal{N} = \mathbb{R}^N$, also $\mathrm{d}g(\tilde{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ invertierbar. Es folgt mit dem Satz von der lokalen Diffeomorphie Satz 31.5, dass offene Umgebungen $U_1 \subseteq U \times \mathbb{R}^{N-k}$ von $\tilde{a}$ und $V_1 \subseteq \mathbb{R}^N$ von $p = g(\tilde{a})$ existieren mit $h := g|_{U_1} \in \operatorname{Diff}(U_1, V_1)$. Aufgrund der Stetigkeit von $\psi^{-1}\colon M \cap V \to U$ und wegen $(a,0) = (\psi^{-1}(p), 0)$ können wir nun eine offene Umgebung $W \subseteq V \cap V_1$ von p derart wählen, dass $(\psi^{-1}(q), 0) \in U_1$ für alle $q \in W \cap M$ gilt. Für diese q gilt dann $h((\psi^{-1}(q), 0)) = g((\psi^{-1}(q), 0)) = q$, also $h^{-1}(q) = (\psi^{-1}(q), 0)$. Ist also $P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten, so ist $P \circ h^{-1}\colon W \to U$ eine C^1-Fortsetzung von $\psi^{-1}\colon W \cap M \to U$. $\square$

Satz 33.12. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\psi\colon U \to M \cap V$ eine lokale Parametrisierung von M um p. Sei ferner $x_0 := \psi^{-1}(p)$. Dann ist*

$$T_pM = \operatorname{Bild} d\psi(x_0).$$

Insbesondere ist T_pM ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^N$, da $d\psi(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ nach Bedingung Definition 33.5(d) *injektiv ist.*

Beweis. „$\supseteq$“: Sei $v \in \mathbb{R}^k$ beliebig, und sei $\varepsilon > 0$ mit $x_0 + tv \in U$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann ist

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap M, \qquad \gamma(t) = \psi(x_0 + tv)$$

eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = p$. Also ist

$$d\psi(x_0)v = \gamma'(0) \in T_pM.$$

„$\subseteq$“: Gemäß Hilfssatz 33.11 existiert eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von p derart, dass sich $\psi^{-1}\colon M \cap W \to U$ zu einer C^1-Abbildung $\varphi\colon W \to U$ fortsetzen lässt. Sei nun $w \in T_pM$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap V \qquad \text{mit } \gamma(0) = p \text{ und } \gamma'(0) = w.$$

Nach eventueller Verkleinerung von ε können wir annehmen, dass $\gamma(t) \in W$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Wegen $\gamma(t) = \psi(\varphi(\gamma(t))$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ folgt dann

$$w = \gamma'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \psi(\varphi(\gamma(t))) = d\psi(\varphi(\gamma(0)))d\varphi(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = d\psi(x_0)d\varphi(p)w \in \operatorname{Bild} d\psi(x_0).$$

$\square$

Bemerkung 33.13. (a) Die Dimension einer nichtleeren Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ist eindeutig bestimmt, da sie nach Satz 33.12 der Vektorraumdimension des Tangentialraums T_pM in jedem Punkt $p \in M$ entspricht.

Randbemerkung: Die leere Menge $\varnothing \subseteq \mathbb{R}^N$ ist auch eine Untermannigfaltigkeit. Damit die wesentlichen Sätze gültig bleiben, muss man ihr alle Dimensionen gleichzeitig zuordnen.

(b) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(V)$ und $M \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Dann gilt für alle $p \in M$:

$$p \text{ kritischer Punkt von } f|_M \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(p) \in N_pM.$$

Dies folgt aus den Definition und Bemerkung 33.4 und Definition 33.10.

Satz 33.14 (Hauptsatz von Lagrange)**.** *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $g \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$ mit $m < N$ und $M := g^{-1}(c)$ für einen regulären Wert $c \in g(V)$ von g. Dann gilt für $p \in M$:*

(a) $T_pM = \operatorname{Kern} \mathrm{d}g(p)$

(b) $N_pM = \operatorname{span}\big\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\big\}$.

(c) *Ist $f \in C^1(V)$ gegeben, so ist p kritischer Punkt von $f|_M$ genau dann, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ existieren mit $\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(p)$. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn p ein lokales Extremum von $f|_M$ ist.*

Bemerkung: Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen *Lagrange-Multiplikatoren.*

Beweis. **(a) und (b):** Da die Funktionen $g_i \in C^1(V)$, $i = 1, \dots, m$ auf M konstant sind, folgt mit Satz 33.3

$$\langle \nabla g_i(p), v \rangle = 0 \qquad \text{für alle } v \in T_pM,\ i = 1, \dots, m$$

und somit auch

$$dg(p)v = J_g(p)v = \begin{pmatrix} \langle \nabla g_1(p), v\rangle \\ \dots \\ \langle \nabla g_m(p), v\rangle \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^m} \qquad \text{für alle } v \in T_pM.$$

Es folgt daher

$$T_pM \subseteq \operatorname{Kern} \mathrm{d}g(p) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{span}\big\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\big\} \subseteq T_pM^\perp = N_pM.$$

Die Gleichheit folgt nun jeweils aus Dimensionsgründen, denn: Nach Satz 33.7 und Satz 33.12 ist $\dim T_pM = N - m$ und somit $\dim N_pM = m$ gemäß Definition und Satz 33.9. Ferner ist

$$\dim \operatorname{span}\big\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\big\} = \operatorname{rang} J_g(p) = \dim \operatorname{Bild} \mathrm{d}g(p) = m$$

(da p ein regulärer Punkt von g ist) und somit

$$\dim \operatorname{Kern} \mathrm{d}g(p) = N - \dim \operatorname{Bild} \mathrm{d}g(p) = N - m.$$

(c): Wegen Bemerkung 33.13(b) und (b) gilt:

$$p \text{ ist kritischer Punkt von } f|_M \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(p) \in N_pM = \operatorname{span}\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\}.$$

Dies liefert die Behauptung. $\square$

Beispiel 33.15 (Fortsetzung von Bemerkung und Beispiel 33.1)**.** Sei $V = \mathbb{R}^3$, $q = (0,0,1) \in V$, und seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \left| \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) - q \right|_2^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2.$$

Sei ferner $M := g^{-1}(1) \subseteq \mathbb{R}^3$. Da $\nabla g(x,y,z) = (2x, \frac{y}{2}, \frac{2}{9}z)^T \neq 0$ für $(x,y,z) \neq 0$, also insbesondere für $(x,y,z) \in M$, ist 1 ein regulärer Wert von g. Wie schon in Bemerkung und Beispiel 33.1 bemerkt, existiert $p = (x,y,z) \in M$ mit $|p - q|_2 = \operatorname{dist}(q, M)$, d. h. p ist ein globales Minimum von $f|_M$. Im Folgenden bestimmen wir p und somit auch $\operatorname{dist}(q, M)$.

Nach Satz 33.14 existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$, d. h.

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2(z-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ y/2 \\ 2z/9 \end{pmatrix} \\ g(x,y,z) = 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} (1-\lambda)x = 0 & \text{(I)} \\ (4-\lambda)y = 0 & \text{(II)} \\ (9-\lambda)z = 9 & \text{(III)} \\ x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 & \text{(IV)} \end{array}\right.$$

1. Fall $x \neq 0 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} \lambda = 1 \overset{\text{(II),(III)}}{\Rightarrow} y = 0,\ z = \frac{9}{8}$. Aus (IV) folgt $x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}$ und damit $f(x,y,z) = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{7}{8}$.

2. Fall $y \neq 0 \overset{(II)}{\Rightarrow} \lambda = 4 \overset{(I),(III)}{\Rightarrow} x = 0$ und $z = \frac{9}{5}$. Aus (IV) folgt $y = \pm 2\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$ und damit $f(x,y,z) = 4\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4 - \frac{36}{25} + \frac{16}{25} = \frac{16}{5}$

3. Fall $x = 0 = y \overset{(IV)}{\Rightarrow} 1 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$, d. h. $z = \pm 3$. Es folgt $f(x,y,z) = (z-1)^2 = 4$ falls $z = 3$ und $f(x,y,z) = 16$ falls $z = -3$.

Da p ein globales Minimum von $f|_M$ ist, trifft nur Fall 1 zu; also wird dieses Minimum genau in den Punkten $\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}, 0, \frac{9}{8}\right)$ angenommen. Folglich ist

$$\operatorname{dist}(q,\, M) = \sqrt{f(p)} = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Beispiel 33.16. Sei $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 2y^2 = \frac{11}{2} \quad \text{und} \quad 4x = 3z\right\}$, und sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x + y - z$. Wir möchten die Funktion $f|_M$ auf globale Extrema untersuchen. Offensichtlich ist M abgeschlossen und beschränkt (denn für $(x,y,z) \in M$ ist $|x|^2 + |y|^2 \leq \frac{11}{2}$ und $|z| = \frac{4}{3}|x| \leq \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{2}}$). Also ist M kompakt, und somit werden die Werte $\max_M f$ und $\min_M f$ angenommen. Ferner ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, denn: Es ist $M = g^{-1}(c)$ mit $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $g(x,y,z) = \binom{x^2+2y^2}{4x-3z}$ und $c = \binom{11/2}{0}$. Dabei gilt:

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ hat Rang 2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0.$$

Also ist $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ genau dann ein kritischer Punkt von g, wenn $x = y = 0$ ist. Insbesondere enthält M keine kritischen Punkte von g, d.h. c ist ein regulärer Wert von g und somit ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, wie behauptet.

Ist nun $(x,y,z) \in M$ ein kritischer Punkt von $f|_M$, so existieren gemäß Satz 33.14 Lagrange-Multiplikatoren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z),$$

d.h.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \end{pmatrix} = g(x,y,z) \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} 2\lambda x + 4\mu = 1 & \text{(I)} \\ 4\lambda y = 1 & \text{(II)} \\ -1 = -3\mu & \text{(III)} \\ x^2 + 2y^2 = \dfrac{11}{2} & \text{(IV)} \\ 4x - 3z = 0 & \text{(V).} \end{array}\right.$$

Aus (III) folgt $\mu = \frac{1}{3}$, und somit erhält man aus (I) und (II) nun $\lambda \neq 0$ sowie $x = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{6}$ und $y = \frac{1}{4\lambda}$; insbesondere also $y = -\frac{3}{2}x$. Die Bedingung (IV),

$$\frac{11}{2} = x^2 + 2y^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{8}\right) = \frac{11}{72\lambda^2},$$

liefert nun $\lambda = \pm\frac{1}{6}$ und somit $x = \pm 1$. Unter Verwendung der Bedingungen $y = -\frac{3}{2}x$ und (V), $z = \frac{4}{3}x$, erhält man also folgende kritischen Punkte von $f|_M$:

$$p_1 = (1, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}), \qquad p_2 = (-1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}).$$

Dabei ist $f(p_1) = -\frac{11}{6}$ und $f(p_2) = \frac{11}{6}$. Somit nimmt $f|_M$ in p_2 das globale Maximum mit dem Wert $\frac{11}{6}$ und in p_1 das globale Minimum mit dem Wert $-\frac{11}{6}$ an.

Anschaulich betrachtet ist M der Schnitt eines 'Zylinders' (in z-Richtung mit ellipsenförmiger Basis) mit einer (schräg dazu stehenden) Ebene; also eine Ellipse im $\mathbb{R}^3$. Man sieht leicht, dass eine lineare Funktion auf einer solchen Menge entweder konstant ist oder genau zwei kritische Punkte hat, in denen sie das globale Minimum und das globale Maximum annimmt. In dem vorliegenden Fall ist ferner M ursprungssymmetrisch ($p \in M$ genau dann, wenn $-p \in M$) und f als lineare Funktion ungerade; daher liegen die kritischen Punkte ursprungssymmetrisch zueinander.

Satz 33.17. *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ symmetrisch. Dann existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^N$ aus Eigenvektoren $v_1, \dots, v_N$ von T zu reellen Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$.*

Beweis. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $f(x) = \langle Tx, x\rangle$. Aufgrund der Symmetrie von T ist dann $\nabla f(x) = 2Tx$ für $x \in \mathbb{R}^N$ (Übung).

Sei ferner $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $g(x) = |x|_2^2$ und $\mathcal{M}_1 := S^{N-1} = g^{-1}(1) \subseteq \mathbb{R}^N$ die Einheitssphäre. Wir wissen bereits, dass 1 ein regulärer Wert von f ist, da $\nabla g(x) = 2x \neq 0$ für $x \in \mathcal{M}_1$ gilt. Da ferner $\mathcal{M}_1$ kompakt und f stetig ist, existert ein $v_1 \in \mathcal{M}_1$ mit $f(v_1) = \min_{\mathcal{M}_1} f$. Gemäß Satz 33.14(c) existiert ferner $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(v_1) = \lambda_1 \nabla g(v_1)$, also $2Tv_1 = 2\lambda_1 v_1$, d.h. $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, wobei

$$\min_{\mathcal{M}_1} f = f(v_1) = \langle Tv_1, v_1\rangle = \langle \lambda v_1, v_1\rangle = \lambda_1$$

ist. Sei nun

$$M_2 := \{x \in \mathcal{M}_1 \mid \langle x, v_1\rangle = 0\} = h^{-1}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$$

mit $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = \left(\begin{smallmatrix}|x|^2\\ \langle x, v_1\rangle\end{smallmatrix}\right)$. Für $x \in M_2$ sind $\nabla h_1(x) = 2x$ und $\nabla h_2(x) = v_1$ orthogonal und somit linear unabhängig, also ist $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ein regulärer Wert von h. Da M_2 somit eine kompakte $N-2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ ist, existert $v_2 \in M_2$ mit $f(v_2) = \min_{M_2} f$; ferner existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_2, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$2Tv_2 = \nabla f(v_2) = \lambda_2 \nabla h_1(v_2) + \mu \nabla h_2(v_2) = 2\lambda_2 v_2 + \mu v_1.$$

Skalarproduktbildung mit v_1 liefert $\mu = 0$ (da $\langle 2Tv_2, v_1\rangle = 2\langle v_2, Tv_1\rangle = 2\lambda_1\langle v_2, v_1\rangle = 0$) , und somit folgt $Tv_2 = \lambda_2 v_2$. Skalarproduktbildung mit v_2 liefert dann $\lambda_2 = \langle Tv_2, v_2\rangle = f(v_2) = \min_{M_2} f \geq \min_{M_1} f = \lambda_1$.

Dieses Verfahren kann man für $k = 1, \dots, N$ induktiv durch Minimierung von f auf der Menge

$$\mathcal{M}_k := \{x \in \mathcal{M}_1 \mid \langle x, v_j\rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k-1\}$$

fortsetzen, und so erhält man das gewünschte Orthonormalsystem. $\square$

Sucht man globale Extrema einer Funktion auf Mengen, die keine Untermannigfaltigkeiten darstellen, so zerlegt man die Mengen in offene Mengen und Untermannigfaltigkeiten (falls möglich) und wendet dort jeweils den Satz von Lagrange an. Sei zum Beispiel $M = M_1 \cup M_2$, wo M_1 offen ist und M_2 eine Untermannigfaltigkeit, dann ist ein lokales Extremum auf $M_1 \cup M_2$ auch jeweils ein lokales Extremum auf M_1 und M_2.

Beispiel 33.18. Sei $B := \big\{x \in \mathbb{R}^N \,\big|\, |x| \leq 1\big\}$ und $f \in C^1(V)$, wobei V eine offene Umgebung von B sei (d.h. $V \subseteq \mathbb{R}^N$ ist offen und $B \subseteq V$). Da B kompakt und f insbesondere stetig ist, nimmt f auf B ein globales Minimum und ein globales Maximum an. Um diese Werte zu bestimmen, muss man Fälle unterscheiden. Sei $x \in B$ ein globales Extremum von $f|_B$.

Ist $|x| < 1$, d.h. $x \in \mathring{B}$, so ist x auch ein globales Extremum von $f|_{\mathring{B}}$, und es folgt $\nabla f(x) = 0$ gemäß Satz 28.4, da $\mathring{B} \subseteq \mathbb{R}^N$ offen ist.

Ist $|x| = 1$ und somit $x \in S^{N-1} := \partial B$, so ist x ein kritischer Punkt von $f|_{S^{N-1}}$. In diesem Fall existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) = 2\lambda x$ mit $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $g(x) = |x|^2$. Dies folgt aus Satz 33.14, da 1 ein regulärer Wert von g ist.

Sei z.B. speziell $N = 2$ und

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

In diesem Fall ist

$$f(x) = \langle Tx, x\rangle \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad T = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Die Eigenwerte von T sind $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; zugehörige normierte Eigenvektoren sind $v_1 = \sqrt{\frac{1}{5}}(1,2)^T$ und $v_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}(2,-1)^T$. Insbesondere ist T invertierbar. Ferner ist $\nabla f(x) = 2Tx$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Somit ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von $f|_{\mathring{B}}$.

Ferner sind die kritischen Punkte von $f|_{S^{N-1}}$ genau die normierten Eigenvektoren $\pm v_1, \pm v_2$ von T, wobei $f(\pm v_1) = \lambda_1 = 5$ und $f(\pm v_2) = \lambda_2 = 10$ gilt. Es folgt, dass die Funktion f in $\pm v_2$ ihr globales Maximum 10 und in $(0,0)$ ihr globales Minimum 0 annimmt.

34. Mengenringe und Inhalte

Inhalt des letzten Teil der Vorlesung sind die Grundlagen der Maßtheorie. Die Maßtheorie stellt das Fundament der Integrationstheorie, der Stochastik und auch mancher Bereiche in der theoretischen Physik (u.a. Quantenmechanik) dar. Das Grundproblem der Maßtheorie ist es, Teilmengen A einer gegebenen Menge Ω in vernünftiger Weise eine *Maßzahl* $\mu(A)$ zuzuordnen. Diese Maßzahl kann z.B. ein Maß für die Größe (d.h. das Volumen) der Menge darstellen. Ist Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum (d.h. die Elemente von Ω repräsentieren die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments), so ist die relevante Maß von A die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis aus A eintritt (in diesem Fall schreibt man dann $P(A)$ anstelle von $\mu(A)$).

Auf den ersten Blick scheint es erstrebenswert, die Funktion μ (bzw. P) auf der gesamten Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ zu definieren. Dies ist allerdings nicht immer möglich, ohne dabei wichtige Eigenschaften von μ zu verlieren. Daher ist es wichtig, Mengensysteme in $\mathcal{P}(\Omega)$ zu untersuchen, welche sich „messen lassen“, d.h. welche einen vernünftigen Definitionsbereich für μ (bzw. P) darstellen. In der Stochastik wird noch ein weiterer natürlicher Grund auftauchen, sich auf Mengenteilsysteme von Ω zu beschränken; diese sind geeignet, den Stand der verfügbaren Information wiederzuspiegeln.

Für die Analysis ist die wichtigste Grundmenge der euklidische Raum $\Omega = \mathbb{R}^N$. Es ist natürlich, (halboffenen) Quadern

$$I = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_N, b_N] \subseteq \mathbb{R}^N \qquad \text{mit } a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, N$$

das Volumen $\operatorname{vol}(I) := (b_1 - a_1) \ldots (b_N, a_N)$ zuzuordnen. Die natürliche Frage ist, auf welche Teilmengen von Ω man diesen Volumenbegriff sinnvoll erweitern kann.

Es ist nützlich, zunächst „Rechenregeln mit Unendlich“ zu vereinbaren: Im Folgenden sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(a) Wir vereinbaren folgende Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
&a \pm \infty := \pm\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \\
&\infty + \infty := \infty, \; -\infty - \infty := -\infty \\
&a \cdot (\pm\infty) := \begin{cases} \pm\infty & \text{für } a > 0 \\ \mp\infty & \text{für } a < 0 \\ 0 & \text{für } a = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nicht definiert ist allerdings $\infty - \infty$.

(b) Wir definieren $a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $a > -\infty$ für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ferner sei $|\pm\infty| := \infty$.

(c) Für $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ setzen wir

$$\sup A := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \infty \in A \\ \sup(A \setminus \{-\infty\}), & \text{falls } \infty \notin A \end{cases}$$
$$\inf A := \begin{cases} -\infty, & \text{falls } -\infty \in A \\ \inf(A \setminus \{\infty\}), & \text{falls } -\infty \notin A \end{cases}$$

(d) Ist $(a_k)_k$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$, so sei

$$\liminf_{k\to\infty} a_k := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n$$
$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Wie früher folgt $\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k$. Bei Gleichheit schreiben wir $\lim_{k\to\infty} a_k$ für den gemeinsamenen Wert.

(e) Ist $(a_k)_k$ eine Folge in $[0,\infty]$, so setzen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \in [0,\infty].$$

Diese Summe nimmt bereits dann den Wert ∞ an, wenn eines der $a_k = \infty$ ist.

Mit dieser Definition gilt der

Satz 34.1 (Doppelreihensatz für nichtnegative Summanden)**.** *Sind $a_{ij} \in [0,\infty]$ für $i,j \in \mathbb{N}_0$, so ist*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}, \tag{34.1}$$

wobei $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine beliebige Abzählung sei. Da die Art und Weise der Aufsummierung also keine Rolle spielt, schreiben wir manchmal einfach $\sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} a_{ij}$ für die Summen in (34.1)*.*

Beweis. Den Fall, wo $\sum_{i,j} a_{ij}$ summierbar ist, haben wir schon im Satz 18.25 bewiesen. Sei nun also $\sum_{i,j} a_{ij}$ nicht summierbar. Für beliebiges $M > 0$ existiert dann $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a_{ij} \geq M. \tag{34.2}$$

Es folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \geq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} \geq M, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \geq \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} \geq M.$$

Ferner existiert $K \in \mathbb{N}_0$, so dass $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \{\varphi(k) \mid k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq K\}$ gilt. Es folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} \geq \sum_{k=0}^{K} a_{\varphi(k)} \geq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \geq M.$$

Da $M > 0$ beliebig war, gilt in (34.1) Gleichheit, und der Wert ist ∞. □

Im Folgenden sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge.

Definition 34.2. (a) Ein System $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt *Mengenring auf* Ω (oder kurz: *Ring auf* Ω), wenn gilt:

(i) $\varnothing \in \mathcal{R}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

(b) Eine Funktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf $\mathcal{R}$ nennt man *Inhalt auf* $\mathcal{R}$, wenn gilt:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkte Mengen sind.

(c) Ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ heißt

- *endlich*, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt.
- σ*-endlich*, wenn es eine Folge von Mengen $\Omega_m \in \mathcal{R}$ gibt mit

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega \qquad \text{und} \qquad \mu(\Omega_m) < \infty \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

- σ*-additiv*, wenn für jede Folge von (paarweise) disjunkten Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, deren Vereinigung $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathcal{R}$ liegt, gilt:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ein σ-additiver Inhalt heißt *Prämaß*.

Beispiel 34.3. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist selbst ein Ring auf Ω. Sei $a \in \Omega$. Dann ist ein (endlicher und σ-additiver) Inhalt auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gegeben durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases} \qquad (\textit{Diracmaß})$$

Ist allgemeiner $A_0 \subseteq \Omega$ eine feste Teilmenge, so ist ein (σ-additiver) Inhalt auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A \cap A_0, \text{ falls } A \cap A_0 \text{ endlich;} \\ \infty, \text{ falls } A \cap A_0 \text{ nicht endlich.} \end{cases}$$

Für diesen Inhalt gilt offensichlich:

$$\begin{aligned} \mu \text{ endlich} &\iff A_0 \text{ endlich} \\ \mu\ \sigma\text{-endlich} &\iff A_0 \text{ höchstens abzählbar} \end{aligned}$$

Ist $A_0 = \Omega$ und diese Menge höchstens abzählbar, so nennt man μ das *Zählmaß auf* Ω.

Bemerkung 34.4. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Dann gilt:

(a) Mit $A, B \in \mathcal{R}$ ist auch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

(b) μ ist *monoton*, d.h. für $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$. Dies folgt, da $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ mit $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \textit{(Übung!)}$$

Falls $\mu(A \cap B) < \infty$ ist, kann man dies auch in der Form

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

schreiben.

(d) Für $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i). \qquad \textit{(Übung!)}$$

Hierbei gilt Gleichheit, falls die A_i disjunkt sind. Dies folgt z.B. induktiv aus (c).

Wir verwenden folgende praktische Schreibweisen: Ist $(A_m)_m$ eine Folge von Teilmengen von Ω und $A \subseteq \Omega$, so schreiben wir

- $A_m \uparrow A$, falls $A_m \subseteq A_{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ gilt;
- $A_m \downarrow A$, falls $A_m \supseteq A_{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ gilt.

Satz und Definition 34.5. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *μ ist σ-additiv, also ein Prämaß.*

(ii) *μ ist* σ-subadditiv, *d.h. für jede Folge von Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

(iii) *μ ist* stetig von unten, *d.h. für jede Folge von Mengen $A_m \in \mathcal{R}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $A_m \uparrow A \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$.*

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (iii)“: Seien A, A_m, $m \in \mathbb{N}$ wie in (iii) gegeben. Sei ferner $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 2$. Dann ist A_m die disjunkte Vereinigung der $B_1, \ldots, B_m$ für $m \in \mathbb{N}$ und A die disjunkte Vereinigung aller B_k, $k \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gilt somit

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (ii)“: Seien A, A_k, $k \in \mathbb{N}$ wie in (ii) gegeben. Sei ferner $B_m := A_1 \cup \cdots \cup A_m$ für $m \in \mathbb{N}$; dann gilt $B_m \uparrow A$. Nach Voraussetzung und Bemerkung 34.4(d) ist dann

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Sind $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen und ist $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$, so gilt aufgrund von Bemerkung 34.4(b) und (d)

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) \qquad \text{für jedes } r \geq 1.$$

Durch Grenzübergang $r \to \infty$ folgt $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ und somit Gleichheit nach Voraussetzung. □

Definition 34.6. (a) Für $a, b \in \mathbb{R}^N$ schreiben wir $(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_N, b_N]$ und nennen $I := (a, b]$ einen (halboffenen) *Quader*. Die Zahl

$$\operatorname{vol}(I) := \begin{cases} (b_1 - a_1) \ldots (b_N - a_N), & \text{falls } b_i \geq a_i \text{ für alle } i \\ 0, & \text{falls } b_i < a_i \text{ für ein } i \quad (\text{d. h. } I = \varnothing) \end{cases}$$

heißt *Volumen* von I.

(b) Die Menge aller halboffenen Quader im $\mathbb{R}^N$ bezeichnen wir mit Q_N.

(c) Die Menge aller endlichen Vereinigungen von halboffenen Quadern im $\mathbb{R}^N$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(Q_N)$.

Bemerkung 34.7. Sind $I, J \in Q_N$, so ist auch $I \cap J \in Q_N$.

Beweis. Ist $I = (a, b]$ und $J = (c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^N$, so ist $I \cap J = (x, y]$ mit $x, y \in \mathbb{R}^N$ gegeben durch $x_i = \max\{a_i, c_i\}$, $y_i = \min\{b_i, d_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. □

Satz 34.8. (a) *$\mathcal{R}(Q_N)$ ist ein Ring auf $\mathbb{R}^N$.*

(b) *Jedes Element von $\mathcal{R}(Q_N)$ lässt sich als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben.*

Um dies zu beweisen, benötigen wir folgenden

Hilfssatz 34.9. *Seien $I, I_1, \dots, I_k \in Q_N$. Dann lässt sich $I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$ als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $k = 1$ und schreiben J anstelle von I_1. Wir zeigen also:

$$(34.3) \quad I, J \in Q_N \qquad \Longrightarrow \qquad I \setminus J \text{ ist endliche disjunkte Vereinigung von Quadern.}$$

Ohne Einschränkung ist dabei $J \subseteq I$; sonst kann man J unter Beachtung von Bemerkung 34.7 durch $J \cap I$ ersetzen.

Wir schreiben dazu $I = (a, b]$, $J = (a', b']$ mit $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^N$, wobei $a_j \le a'_j \le b'_j \le b_j$ für $j = 1, \dots, N$ gelte. Ferner setzen wir

$$I_j^1 := (a_j, a'_j], \quad I_j^2 := (a'_j, b'_j] \quad \text{und} \quad I_j^3 := (b'_j, b_j] \qquad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Mit $M := \{1, 2, 3\}^N$ lässt sich dann I als disjunkte Quadervereinigung

$$I = \bigcup_{v \in M} I_1^{v_1} \times \cdots \times I_N^{v_N}$$

schreiben. Ferner ist $J = I_1^2 \times \cdots \times I_N^2$ und somit

$$I \setminus J = \bigcup_{\substack{v \in M \\ v \neq (2,\dots,2)}} I_1^{v_1} \times \cdots \times I_N^{v_N}$$

eine disjunkte Vereinigung von $3^N - 1$ Quadern (von denen einige die leere Menge sein können). Es folgt also (34.3).

Nun beweisen wir die Behauptung des Satzes per Induktion nach k. Der Fall $k = 1$ ist bereits erledigt.

„$k > 1$“: Nach Induktionsannahme ist

$$I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1}) = J_1 \cup \ldots \cup J_\ell \qquad \text{mit disjunkten } J_i \in Q_N.$$

Also hat man die disjunkte Vereinigung

$$I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k) = [J_1 \cup \ldots \cup J_\ell] \setminus I_k = [J_1 \setminus I_k] \cup \ldots \cup [J_\ell \setminus I_k]$$

wobei sich jede der Mengen auf der rechten Seite gemäß (34.3) wiederum als endliche disjunkte Quadervereinigung schreiben lässt. Also lässt sich auch $I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$ als endliche disjunkte Quadervereinigung schreiben, wie behauptet. □

Beweis von Satz 34.8. **(a):** Als einzige nichttriviale Eigenschaft ist zu zeigen:

$$A, B \in \mathcal{R}(Q_N) \qquad \Longrightarrow \qquad A \setminus B \in \mathcal{R}(Q_N).$$

Dies folgt direkt aus Hilfssatz 34.9, wenn $A \in Q_N$ ist. Im allgemeinen Fall schreiben wir A als endliche Quadervereinigung $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$. Dann ist

$$A \setminus B = \underbrace{A_1 \setminus B}_{\in \mathcal{R}(Q_N)} \cup \cdots \cup \underbrace{A_r \setminus B}_{\in \mathcal{R}(Q_N)} \in \mathcal{R}(Q_N).$$

(b): Sei $A = A_1 \cup \dots A_r \in \mathcal{R}(Q_N)$ mit Quadern A_j. Dies lässt sich also disjunkte Vereinigung

$$A = A_1 \cup [A_2 \setminus A_1] \cup [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cup \dots \cup [A_r \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{r-1})]$$

schreiben, wobei jeder der Summanden auf der rechten Seite gemäß Hilfssatz 34.9 eine disjunkte Quadervereinigung ist. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 34.10. Ist $A \in Q_N$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so existieren $B, C \in Q_N$ mit $\overline{B} \subseteq A \subseteq \mathring{C}$ und

$$\operatorname{vol}(B) \geq (1-\varepsilon)\operatorname{vol}(A), \qquad \operatorname{vol}(C) \leq (1+\varepsilon)\operatorname{vol}(A).$$

Beweis. Sei $A := (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^N$, und sei $a_\delta := (a_1 + \delta, \dots, a_N + \delta)$ und $b_\delta := (b_1 + \delta, \dots, b_N + \delta)$ für $\delta > 0$. Sei ferner $B_\delta := (a_\delta, b]$ und $C_\delta := (a, b_\delta]$. Dann ist $\overline{B_\delta} \subseteq A \subseteq \mathring{C}_\delta$ für $\delta > 0$, und es gilt $\operatorname{vol}(B_\delta) \to \operatorname{vol}(A)$, $\operatorname{vol}(C_\delta) \to \operatorname{vol}(A)$ für $\delta \to 0$. Zu gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta > 0$ so, dass die Behauptung für $B := B_\delta$ und $C := C_\delta$ gilt. $\square$

Definition und Satz 34.11. *Für $A \in \mathcal{R}(Q_N)$ definieren wir*

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{vol}(A_i), \qquad \textit{falls } A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i \textit{ mit disjunkten } A_i \in Q_N. \tag{34.4}$$

Dann ist $\lambda\colon \mathcal{R}(Q_N) \to [0, \infty)$ ein wohldefinierter, σ-endlicher und σ-additiver Inhalt auf $\mathcal{R}(Q_N)$, also insbesondere ein Prämaß auf $\mathcal{R}(Q_N)$.

Beweis. Es ist klar, dass λ die Eigenschaften eines Inhaltes hat, wenn λ wohldefiniert ist. Zu zeigen ist also:

Ist $A = \bigcup_{i=1}^r A_i = \bigcup_{j=1}^s B_j$ mit jeweils disjunkten $A_1, \dots, A_r \in Q_N$ bzw. $B_1, \dots, B_s \in Q_N$, so ist

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{vol}(A_i) = \sum_{j=1}^{s} \operatorname{vol}(B_j). \tag{34.5}$$

Dies ist anschaulich einleuchtend, erfordert aber einen etwas technischen Beweis. Wir verweisen an dieser Stelle auf O. Forster, Analysis 3, 6. Auflage, S. 18, Hilfssatz 1.

Zur σ-Endlichkeit von λ: Diese folgt, da

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{m=1}^{\infty} (-\tilde{m}, \tilde{m}] \qquad \text{mit } \tilde{m} = (m, m, \dots, m) \in \mathbb{R}^N \text{ für } m \in \mathbb{N},$$

wobei $\lambda((-\tilde{m}, \tilde{m}]) = (2m)^N < \infty$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

Zur σ-Additivität von λ: Es reicht gemäß Bemerkung 34.4 zu zeigen, dass λ σ-subadditiv ist. Seien also $A_k \in \mathcal{R}(Q_N)$, $k \in \mathbb{N}$ derart gegeben, dass $A_0 := \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{R}(Q_N)$ ist.

Sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig. Unter Verwendung von Bemerkung 34.10 können wir dann $B_k, C_k \in \mathcal{R}(Q_N)$, $k \in \mathbb{N}_0$ so wählen, dass $\overline{B_k} \subseteq A_k \subseteq \mathring{C}_k$ und

$$\lambda(B_k) \geq (1-\varepsilon)\lambda(A_k), \qquad \lambda(C_k) \leq (1+\varepsilon)\lambda(A_k).$$

gilt. Insbesondere gilt $\overline{B}_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{C}_k$, und da $\overline{B}_0$ kompakt ist, folgt

$$B_0 \subseteq \overline{B}_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathring{C}_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} C_k \qquad \text{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt

$$\lambda(B_0) \leq \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\Big) \overset{\text{Bemerkung 34.4(d)}}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \lambda(C_k) \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} \lambda(A_k) \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Es folgt

$$\lambda(A_0) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\lambda(B_0) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\lambda(A_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$, also die σ-Subadditivität von λ. $\square$

35. Maßerweiterung

Im Folgenden sei stets Ω ein Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω und μ ein σ-endlicher und σ-additiver Inhalt auf $\mathcal{R}$, insbesondere also ein Prämaß. Als Standardbeispiel sollte man $\Omega = \mathbb{R}^N$ und den von den Quadern erzeugten Mengenring $\mathcal{R}(Q_N)$ vor Augen haben. Hier stellt sich z.B. die Frage, inwieweit man den in Definition und Satz 34.11 definierten Inhalt auf abzählbare Vereinigungen von Quadern erweitern kann.

Definition und Satz 35.1. (a) *Mit $\mathcal{R}^\uparrow$ bezeichnen wir im Folgenden das System aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, welche sich als abzählbare Vereinigung von Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$ schreiben lassen. Dabei kann ohne Einschränkung alternativ einer der beiden folgenden Fälle angenommen werden:*

- $A_k \uparrow A$.
- $A_k \cap A_j = \varnothing$ *für* $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$.

(b) *Für $A \in \mathcal{R}^\uparrow$ setzen wir*

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \in [0,\infty] \tag{35.1}$$

falls $A_k \uparrow A$ mit $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Dies liefert eine wohldefinierte Fortsetzung von $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ auf $\mathcal{R}^\uparrow$.

Beweis. **(a):** Sei $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit $B_k \in \mathcal{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit $A_k = \bigcup_{j=1}^k B_k \in \mathcal{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $A_k \uparrow A$. Setzt man andererseits $A_1 := B_1$ und $A_k := B_k \setminus [B_1 \cup \ldots B_{k-1}]$, so ist A die disjunkte Vereinigung der Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$.

(b): Aufgrund der Monotonie von μ existiert der Grenzwert in (35.1) in $[0,\infty]$. Sei nun $A \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit

$$A_k \uparrow A \qquad \text{und} \qquad A'_k \uparrow A$$

für gewisse $A_k, A'_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Zur Wohldefiniertheit von μ auf $\mathcal{R}^\uparrow$ müssen wir zeigen:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k). \tag{35.2}$$

Für festes $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir dabei wegen der Stetigkeit von μ von unten (Satz und Definition 34.5)

$$\mu(A_k) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_k \cap A'_j) \leq \lim_{j\to\infty} \mu(A'_j).$$

Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \lim_{j\to\infty} \mu(A'_j),$$

und die umgekehrte Ungleichung erhält man analog. Es folgt (35.2) und somit die Wohldefiniertheit von μ.

Ferner ist offensichtlich $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$, und für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt $A_k \uparrow A$ mit $A_k = A$ für $k \in \mathbb{N}$. Also stimmt die Definition von $\mu(A)$ in (35.1) mit der bisherigen Definition von μ für $A \in \mathcal{R}$ überein, d.h. die Definition (35.1) liefert tatsächlich eine Fortsetzung von μ. □

Bemerkung 35.2. (a) Da μ als σ-endlich vorausgesetzt ist, ist $\Omega \in \mathcal{R}^\uparrow$.

(b) μ ist σ-additiv: Ist $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit **disjunkten** Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(c) μ ist monoton auf $\mathcal{R}^\uparrow$, d.h. für $A, B \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Gilt nämlich $A_k \uparrow A$, $B_k \uparrow B$ mit $A_k, B_k \in \mathcal{R}$, so folgt aus $A \subseteq B$ auch $[A_k \cup B_k] \uparrow B$. Ferner gilt $\mu(A_k) \leq \mu(A_k \cup B_k)$ für festes k wegen der Monotonie von μ, und somit

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) = \mu(B).$$

(d) μ ist σ-subadditiv: Sind $B_k \in \mathcal{R}^\uparrow$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathcal{R}^\uparrow$, und es gilt

$$\mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

Dies sieht man so: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_{k\ell} \uparrow B_k$ für $\ell \to \infty$ mit gewissen $A_{k\ell} \in \mathcal{R}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Mit

$$C_\ell := \bigcup_{k=1}^{\ell} A_{k\ell} \in \mathcal{R} \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

gilt dann $C_\ell \uparrow B$ für $\ell \to \infty$. Wegen Bemerkung 34.4(d) ist ferner

$$\mu(C_\ell) \leq \sum_{k=1}^{\ell} \mu(A_{k\ell}) \leq \sum_{k=1}^{\ell} \mu(B_k) \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\mu(B) = \lim_{\ell\to\infty} \mu(C_\ell) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

(e) Mit $A, B \in \mathcal{R}^\uparrow$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{R}^\uparrow$, denn:

Ist $A_k \uparrow A$, $B_k \uparrow B$ mit $A_k, B_k \in \mathcal{R}$, so ist $A_k \cap B_k \in \mathcal{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $A_k \cap B_k \uparrow A \cap B$.

(f) Ist $A \in \mathcal{R}^\uparrow$ und $B \in \mathcal{R}$, so ist auch $A \setminus B \in \mathcal{R}^\uparrow$. Dies gilt i.A. nicht, falls nur $B \in \mathcal{R}^\uparrow$ vorausgesetzt wird. Demnach ist $\mathcal{R}^\uparrow$ im Allgemeinen kein Ring.

(g) Im Spezialfall $\mathcal{R} = \mathcal{R}(Q_N)$ kann man die Elemente von $\mathcal{R}^\uparrow$ als abzählbare disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben.

(h) *Nachtrag (3.2.2015):* Sind $A, B \in \mathcal{R}^\uparrow$ disjunkt, so ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, denn: Gilt $A_k \uparrow A$, $B_k \uparrow B$ mit $A_k, B_k \in \mathcal{R}$, so ist die Vereinigung $A_k \cup B_k$ für alle k disjunkt und es gilt $A_k \cup B_k \uparrow A \cup B$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k) &= \lim_{k\to\infty} [\mu(A_k) + \mu(B_k)] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) + \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

Satz 35.3. *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, so ist $D \in \mathcal{R}(Q_N)^\uparrow$.*

Beweis. Sei $\widetilde{Q} \subseteq Q_N$ die Menge der in D enthaltenen Quader $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^N$. Diese Menge ist abzählbar, da $\mathbb{Q}$ und somit auch $\mathbb{Q}^N$ abzählbar ist. Es reicht also, zu zeigen:

$$D = \bigcup_{I\in\widetilde{Q}} I \tag{35.3}$$

Die Inklusion „$\supseteq$" ist dabei trivial. Sei nun $x \in D$. Da D offen ist, existiert $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $y \in D$ für alle $y \in \mathbb{R}^N$ mit $|x - y|_\infty < \frac{1}{m}$. Für $i = 1, \ldots, N$ wählen wir nun $y_i \in \mathbb{Q} \cap \left[x_i - \dfrac{1}{m}, x_i\right)$ und setzen $z_i := y_i + \dfrac{1}{m}$. Dann liegen $y = (y_1, \ldots, y_N)$ und $z = (z_1, \ldots z_N)$ in $\mathbb{Q}^N$, und es gilt $x \in (y, z] \subseteq D$. Es folgt $(y, z] \in \widetilde{Q}$ und somit $x \in \bigcup_{I\in\widetilde{Q}} I$. Es folgt (35.3). $\square$

Definition 35.4. Eine Funktion $\chi\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt *äußeres Maß auf* Ω, wenn gilt:

(a) $\chi(\varnothing) = 0$.

(b) Sind $A, A_k \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, so ist

$$\chi(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \chi(A_k).$$

Man beachte, dass χ dann auch monoton und σ-subadditiv ist.

Definition und Satz 35.5. *Sei wie bisher μ ein σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ auf Ω, welches gemäß Definition und Satz 35.1 auf $\mathcal{R}^\uparrow$ fortgesetzt wird. Wir definieren $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu^*(A) = \inf\bigl\{\mu(D) \bigm| D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\bigr\}.$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω, und für $A \in \mathcal{R}^\uparrow$ gilt $\mu(A) = \mu^*(A)$. Man nennt μ^* das von μ induzierte äußere Maß auf Ω.

Beweis. Offensichtlich ist $\mu(\varnothing) = 0$, da $\varnothing \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^\uparrow$ ist.

Seien nun $A, A_k \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, und sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k). \tag{35.4}$$

Nach Definition von $\mu^*(A_k)$ existieren $D_k \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit $A_k \subseteq D_k$ und $\mu(D_k) \leq \mu^*(A_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $A \subseteq D := \bigcup_{k=1}^\infty D_k \in \mathcal{R}^\uparrow$, und wegen der Definition von μ^* und der σ-Subadditivität von μ (Bemerkung 35.2(d)) gilt also

$$\mu^*(A) \leq \mu(D) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(D_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \Big(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt (35.4). Somit ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω.

Sei nun $A \in \mathcal{R}^\uparrow$. Für $D \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit $A \subseteq D$ gilt $\mu(A) \leq \mu(D)$ wegen der Monotonie von μ (Bemerkung 35.2(c)). Es folgt

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(D) \;\big|\; D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\big\} = \min\big\{\mu(D) \;\big|\; D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\big\} = \mu(A). \qquad \square$$

Bemerkung 35.6. (a) Die σ-Endlichkeit von μ benötigt man in Definition und Satz 35.5 nicht unbedingt. Ohne diese Voraussetzung kann es allerdings passieren, dass für manche $A \subseteq \Omega$ in der Definition von $\mu^*(A)$ das Infimum der leeren Menge betrachtet wird; dies liefert dann $\mu^*(A) = \infty$.

(b) In der Situation von Definition und Satz 35.5 lässt sich μ^* auch direkt über Mengen in $\mathcal{R}$ charakterisieren; es gilt

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{R} \;\text{ für } k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{A=1}^\infty A_k\right\} \qquad \text{für } A \subseteq \Omega.$$

Dies sieht man wie folgt: „$\leq$“: Sind $A_k \in \mathcal{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k =: D \in \mathcal{R}^\uparrow$, so ist

$$\mu^*(A) \leq \mu(D) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$$

nach Definition von μ^* und weil μ σ-ubadditiv ist (Bemerkung 35.2(d)). „$\geq$“: Jedes $D \in \mathcal{R}^\uparrow$ lässt sich als abzählbare disjunkte Vereinigung $D := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ mit $A_k \in \mathcal{R}$ schreiben, und dabei gilt $\mu(D) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$, weil μ σ-additiv ist (Bemerkung 35.2(b)). Es folgt also

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(D) \;\big|\; D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\big\} \geq \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{R}\,, A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right\},$$

wie behauptet.

(c) Betrachtet man den Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(Q_N)$ und $\mu = \lambda$, so nennt man das von λ induzierte äußere Maß λ^* auf $\mathbb{R}^N$ das *äußere Lebesguemaß*. Dieses lässt sich direkt durch Quaderüberdeckungen charakterisieren; man hat:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \,\middle|\, I_k \in Q_N \text{ für } k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} \qquad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Dies folgt aus (b) und der Tatsache, dass sich jedes $A \in \mathcal{R}(Q_N)$ als endliche disjunkte Quadervereinigung schreiben lässt, vgl. Satz 34.8.

(d) In der Situation von Definition und Satz 35.5 ist μ^* im Allgemeinen nicht mehr additiv. Dazu folgendes Beispiel: Sei $\Omega = \mathbb{R}$; $\mathcal{R} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}) = 1$, so gilt (Übung):

(i) $\mathcal{R}$ ist ein Ring auf $\mathbb{R}$;

(ii) μ ist ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$.

(iii) Das von μ erzeugte äußere Maß $\mu^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ erfüllt $\mu^*(A) = 1$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ und ist somit nicht additiv.

Das äußere Lebesguemaß $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ ist ebenfalls nicht additiv, aber dies kann man nur mit Hilfe des Auswahlaxioms beweisen. Es ist daher nötig, sich wieder auf Mengenteilsysteme einzuschränken, um die σ-Additivität zurückzugewinnen. Dies führt auf folgende Definition.

Definition 35.7. (a) Ein System $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt *σ-Algebra auf* Ω, wenn gilt:

(i) $\varnothing \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$

(iii) $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$

Das Paar $(\Omega, \mathcal{M})$ nennt man dann *Messraum* oder *messbarer Raum*.

(b) Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{M}$ heißt *Maß*, wenn gilt:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Sind $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$ disjunkt, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \textit{(σ-Additivität)}$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ nennt man dann *Maßraum*.

Bemerkungen und Beispiele 35.8. (a) Ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf Ω und sind $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, so ist auch

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \mathcal{M}.$$

(b) Eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ auf Ω ist auch ein Ring auf Ω, denn mit $A, B \in \mathcal{M}$ ist auch

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}.$$

Die Umkehrung gilt nicht; z.B. ist $\mathcal{R}(Q_N)$ ein Ring auf $\mathbb{R}^N$, aber keine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^N$. Jedes Maß auf $\mathcal{M}$ ist auch ein Inhalt auf $\mathcal{M}$, denn in Definition 35.7(b)(ii) kann die abzählbare Vereinigung effektiv aus zwei disjunkten Mengen A_1, A_2 bestehen, indem man $A_k = \varnothing$ für $k \geq 3$ setzt.

(c) Die Mengensysteme $\{\varnothing, \Omega\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ sind σ-Algebren auf Ω.

(d) Ist I eine Indexmenge und $\mathcal{M}_i$, $i \in I$ eine Familie von σ-Algebren auf Ω, so ist auch

$$\mathcal{M} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

eine σ-Algebra.

(e) Hat ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die Eigenschaften Definition 35.7(a)(i) und (ii) und gilt

$$A, B \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{M} \tag{35.5}$$

sowie

$$A_k \in \mathcal{M},\ k \in \mathbb{N} \text{ disjunkt} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}, \tag{35.6}$$

so ist $\mathcal{M}$ bereits eine σ-Algebra, d.h. es gilt auch Definition 35.7(a)(iii). Dies sieht man so:

Zunächst ist mit $B, C \in \mathcal{M}$ dann auch $B \setminus C = B \cap [\Omega \setminus C] \in \mathcal{M}$. Zu zeigen ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}$ für beliebige $B_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$. In (35.6) kann auch eine endliche Anzahl disjunkter Teilmengen stehen, indem wir $A_k = \varnothing$ für fast alle k setzen. Seien nun $A_1 := B_1$ sowie $A_k = B_k \setminus [B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}]$ für $k \geq 2$; dann folgt induktiv $A_1 \in \mathcal{M}$ und

$$A_k = B_k \setminus \underbrace{[A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}]}_{\text{disj. Vereinigung}} \in \mathcal{M} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist A als disjunkte Vereinigung der A_k, $k \in \mathbb{N}$ auch in $\mathcal{M}$.

Definition und Bemerkung 35.9. (a) Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges System von Teilmengen, so ist der Schnitt aller σ-Algebren, welche $\mathcal{T}$ enthalten, gemäß Bemerkungen und Beispiele 35.8(d) wieder eine σ-Algebra. Diese bezeichnen wir mit $\langle \mathcal{T} \rangle^\sigma$ und nennen sie die *von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra.*

(b) Ist $\mathcal{R}$ ein Mengenring auf Ω, so ist $\mathcal{R}^\uparrow \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle^\sigma$. $\mathcal{R}^\uparrow$ ist aber im Allgemeinen keine σ-Algebra.

(c) Sei Ω ein metrischer Raum und $\mathcal{U}$ das System der offenen Teilmengen U von Ω. Dann nennt man $\mathcal{B}(\Omega) := \langle \mathcal{U} \rangle^\sigma$ die *Borelsche σ-Algebra (kurz: Borel-Algebra)* auf Ω. Diese enthält offensichtlich auch alle abgeschlossenen Teilmengen von Ω. Die Mengen in $\mathcal{B}(\Omega)$ heißen *Borelsche Teilmengen von Ω (kurz: Borelmengen)*. Ein auf $\mathcal{B}(\Omega)$ definiertes Maß heißt *Borelmaß auf* Ω.

Vorsicht: In Teilen der Literatur wird bei einem Borelmaß μ noch zusätzlich die Eigenschaft verlangt, dass jeder Punkt in Ω eine offene Umgebung U besitzt mit $\mu(U) < \infty$. Wir verzichten auf diese Forderung.

(d) Die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ auf $\mathbb{R}^N$ wird erzeugt vom System der halboffenen Quader auf $\mathbb{R}^N$, d.h,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \langle Q_N \rangle^\sigma.$$

Beweis: Da sich jeder halboffene Quader im $\mathbb{R}^N$ als Schnitt eines offenen und eines abgeschlossenen Quaders schreiben lässt, folgt $Q_N \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ und damit $\langle Q_N \rangle^\sigma \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Umgekehrt liegt jede offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^N$ in $\langle Q_N \rangle^\sigma$, da sie sich gemäß Satz 35.3 als abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern schreiben lässt. Damit folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subseteq \langle Q_N \rangle^\sigma$.

(e) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, aber dies ist nicht offensichtlich. Man benötigt das Auswahlaxiom, um dies zu zeigen.

Hilfssatz 35.10. *Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und seien $A, A_k \in \mathcal{M}$ für $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Gilt $A_k \uparrow A$ für $k \to \infty$, so folgt $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Mit anderen Worten ist μ stetig von unten.*

(b) *Gilt $A_k \downarrow A$ für $k \to \infty$ und ist $\mu(A_1) < \infty$, so folgt $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Mit anderen Worten ist μ* stetig von oben.

Beweis. **(a):** Dies folgt bereits aus Satz und Definition 34.5.
(b): Übung. □

Definition und Bemerkung 35.11. Ist $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, so kann man analog zu Definition und Satz 35.5 das von μ induzierte äußere Maß $\mu^* \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ definieren durch

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(D) \mid D \in \mathcal{M},\ A \subseteq D\} \qquad \text{für } A \subseteq \Omega. \tag{35.7}$$

Die Eigenschaften eines äußeren Maßes rechnet man exakt genauso nach wie in Definition und Satz 35.5, und aufgrund der Monotonie gilt auch $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{M}$.

Man beachte, dass wegen $\Omega \in \mathcal{M}$ die Menge $\{\dots\}$ in (35.7) stets nichtleer ist. Somit muss man auch nicht verlangen, dass μ σ-endlich ist.

Definition und Satz 35.12. *Sei χ ein äußeres Maß auf Ω. Wir nennen eine Teilmenge A von Ω* messbar bzgl. χ (bzw. χ-messbar)*, wenn gilt:*

$$\chi(Z) = \chi(Z \cap A) + \chi(Z \setminus A) \qquad \textit{für alle } Z \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Dann gilt: Die Klasse $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ der χ-messbaren Teilmengen ist eine σ-Algebra, und die Einschränkung von χ auf $\mathcal{M}$ ist ein Maß.

Man beachte: Die Ungleichung $\chi(Z) \leq \chi(Z \cap A) + \chi(Z \setminus A)$ gilt für beliebige Mengen $A, Z \subseteq \Omega$ als Folge der Subadditivität eines äußeren Maßes.

Beweis. (a) Es ist $\varnothing \in \mathcal{M}$, da $\chi(Z) = \chi(\varnothing) + \chi(Z) = \chi(Z \cap \varnothing) + \chi(Z \setminus \varnothing)$ für alle $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

(b) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann ist auch das Komplement $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$, denn für beliebiges $Z \subseteq \Omega$ gilt

$$\chi(Z) = \chi(Z \cap A) + \chi(Z \setminus A) = \chi(Z \setminus A^c) + \chi(Z \cap A^c).$$

(c) **Behauptung 1:** Sind $A, B \in \mathcal{M}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{M}$. Sei dazu $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Wegen $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{M}$ ist

$$\begin{aligned} \chi(Z) = \chi(Z \cap A) + \chi(Z \setminus A) &= \chi(Z \cap A \cap B) + \chi((Z \cap A) \setminus B) + \chi(Z \setminus A) \\ &\geq \chi(Z \cap A \cap B) + \chi(Z \setminus (A \cap B)), \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} Z \setminus A \cup (Z \cap A) \setminus B = Z \cap (A^c \cup (A \cap B^c)) &= Z \cap (A^c \cup (B^c \setminus A^c)) \\ &= Z \cap (A^c \cup B^c) = Z \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

und der Subadditivität. „$\leq$“ gilt sowieso, also folgt $A \cap B \in \mathcal{M}$. Aus (b) und (c), Behauptung 1 folgt

Behauptung 2: Sind $A, B \in \mathcal{M}$, so auch $A \cup B = \Omega \setminus (A^c \cap B^c)$. Sind ferner A und B disjunkt, so gilt

$$\chi(Z \cap (A \cup B)) = \chi(Z \cap A) + \chi(Z \cap B) \qquad \text{für alle } Z \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Letztere Gleichheit folgt, da mit $Z' := Z \cap (A \cup B)$ entsprechend der Definition der Messbarkeit von A und $B \subseteq A^c$ folgt:

$$\chi(Z') = \chi(Z' \cap A) + \chi(Z' \setminus A) = \chi(Z \cap A) + \chi(Z \cap B).$$

Behauptung 3: Sind $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$ disjunkt, so ist $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}$, und es gilt

$$\chi(Z \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi(Z \cap A_k) \qquad \text{für alle } Z \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{35.8}$$

Dies sieht man so: Wegen Behauptung 2 ist $\chi\big(Z \cap \bigcup_{k=1}^m A_k\big) = \sum_{k=1}^m \chi(Z \cap A_k)$. Mit der Monotonie von χ folgt

$$\chi(Z) = \chi\left(Z \cap \bigcup_{k=1}^m A_k\right) + \chi\left(Z \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k\right) \geq \sum_{k=1}^m \chi(Z \cap A_k) + \chi(Z \setminus A) \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Durch Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir

$$\chi(Z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \chi(Z \cap A_k) + \chi(Z \setminus A) \geq \chi(Z \cap A) + \chi(Z \setminus A) \ \geq \chi(Z)$$

mit Hilfe der σ-Subadditivität von χ. Also gilt überall Gleichheit, und dies zeigt Behauptung 3.

Schluss des Beweises: Die σ-Algebren-Eigenschaften von $\mathcal{M}$ folgen aus (b), (c) und den obigen Behauptungen 1 und 3 unter Berücksichtigung von Bemerkungen und Beispiele 35.8(e). Die σ-Additivität von χ auf $\mathcal{M}$ folgt aus (35.8) mit $Z = \Omega$, und die anderen Maßeigenschaften sind trivial erfüllt. □

Satz 35.13. *Sei μ^* das von einem σ-endlichen Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ induzierte äußere Maß μ^* auf Ω. Dann ist jedes Element aus $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$ messbar bzgl. μ^*.*

Beweis. Aufgrund von Definition und Satz 35.12 reicht es, zu zeigen, dass jede Menge $A \in \mathcal{R}$ μ^*-messbar ist. Sei dazu $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Wir müssen zeigen:

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \leq \mu^*(Z). \tag{35.9}$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$, und sei $B \in \mathcal{R}^\uparrow$ mit $Z \subseteq B$ und $\mu(B) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon$. Dann sind $B \setminus A$, $B \cap A \in \mathcal{R}^\uparrow$ wegen Bemerkung 35.2(e) und (f), also

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \overset{\text{Bemerkung 35.2(h)}}{=} \mu(B) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt (35.9). □

Satz 35.14 (Hauptsatz)**.** *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring auf Ω und $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein σ-endliches Prämaß. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$, welches wir wieder mit μ bezeichnen. Dabei ist μ die Einschränkung des von μ^* induzierten äußeren Maßes, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\bigl\{\mu(D) \bigm| D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\bigr\}\\ &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \,\middle|\, A_k \in \mathcal{R} \ \ \textit{für } k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{A=1}^{\infty} A_k\right\} \qquad \textit{für } A \in \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma.\end{aligned} \tag{35.10}$$

Beweis. **Zur Existenz:** Sei $\mathcal{M}$ das System der μ^*-messbaren Teilmengen von Ω. Gemäß Satz 35.13 ist dann $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma \subseteq \mathcal{M}$, und gemäß Definition und Satz 35.12 ist $\mu^*|_{\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma}$ ein Maß auf $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$, und dieses ist durch (35.10) gegeben.

Zur Eindeutigkeit: Sei τ irgendein Maß auf $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$ mit $\tau|_\mathcal{R} = \mu|_\mathcal{R}$. Ist $D \in \mathbb{R}^\uparrow \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$, so ist $\mu(D) = \tau(D)$ aufgrund der Stetigkeit von unten τ und μ. Sei nun $A \in \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$ beliebig. Für $D \in \mathbb{R}^\uparrow$ mit $A \subseteq D$ ist dann $\tau(A) \leq \tau(D) = \mu(D)$, und somit folgt

$$\tau(A) \leq \inf\bigl\{\mu(D) \bigm| D \in \mathcal{R}^\uparrow, A \subseteq D\bigr\} = \mu(A).$$

Wir betrachten nun zunächst den Spezialfall

$$A \subseteq B \text{ für ein } B \in \mathcal{R} \text{ mit } \tau(B) = \mu(B) < \infty.$$

Wie oben folgt dann auch $\tau(B \setminus A) \leq \mu(B \setminus A)$, und somit

$$\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A) \leq \tau(B) - \tau(B \setminus A) = \tau(A).$$

Insgesamt folgt in diesem Fall also $\mu(A) = \tau(A)$.

Im allgemeinen Fall beachten wir nun, dass aufgrund der σ-Endlichkeitkeit von μ gilt:

$$B_m \uparrow \Omega \text{ mit geeigneten } B_m \in \mathcal{R},\ m \in \mathbb{N} \text{ mit } \tau(B_m) = \mu(B_m) < \infty.$$

Das Argument im Spezialfall zeigt dann $\mu(A \cap B_m) = \tau(A \cap B_m)$ für alle m, und wegen $A \cap B_m \uparrow A$ folgt

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A \cap B_m) = \lim_{m\to\infty} \tau(A \cap B_m) = \tau(A).$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit der Maßfortsetzung auf $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$. $\square$

Bemerkung 35.15. In der Situation von Satz 35.14 induziert das σ-endliche Prämaß $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ im Sinne von Definition und Satz 35.5, und auch die eindeutige Fortsetzung auf $\langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$ induziert im Sinne von Definition und Bemerkung 35.11 ein äußeres Maß ν^*. Diese äußeren Maße stimmen überein, denn für $A \subseteq \Omega$ gilt wegen $\mathcal{R}^\uparrow \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma$ und der Monotonie von μ^*:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) = \inf\bigl\{\mu(D) \bigm| D \in \mathcal{R}^\uparrow,\ A \subseteq D\bigr\} &\geq \inf\{\mu(D) \mid D \in \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma,\ A \subseteq D\} \\ &= \nu^*(A) = \inf\{\mu^*(D) \mid D \in \langle\mathcal{R}\rangle^\sigma,\ A \subseteq D\} \geq \mu^*(A).\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, und dies zeigt die Übereinstimmung der äußeren Maße.

Definition und Bemerkung 35.16. Sei $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$ das in Bemerkung 35.6 definierte äußere Lebesguemaß. Eine λ^*-messbare Teilmenge (im Sinne von Definition und Satz 35.12) bezeichnet man als *Lebesgue-messbar*. Das System $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ aller solchen Mengen ist gemäß Definition und Satz 35.12 eine σ-Algebra, welche die Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ enthält. Es gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}^N,$$

aber die **strikte** Inklusion ist jeweils nicht offensichtlich. Den Unterschied zwischen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ werden wir im folgenden Kapitel anhand von sogenannten *Nullmengen* untersuchen.

Man bezeichnet die Einschränkung von λ^* auf sowohl auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ als auch auf $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ jeweils mit λ und nennt λ das *(N-dimensionale) Lebesguemaß.*

36. Messbarkeit und Nullmengen

Sei stets $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein *Maßraum*, und sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ das durch μ induzierte äußere Maß, d.h. es gilt $\mu^*(A) = \inf\{\mu(D) \mid D \in \mathcal{M},\ A \subseteq D\}$ für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, vgl. Definition und Bemerkung 35.11.

Definition 36.1. Eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *μ-Nullmenge*, wenn $\mu^*(A) = 0$ ist.

Satz 36.2. *Ist $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine μ-Nullmenge, so gilt:*

(a) *A ist μ^*-messbar im Sinne von Definition und Satz 35.12.*

(b) *Jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist auch eine μ-Nullmenge.*

(c) *Es existiert $D \in \mathcal{M}$ mit $A \subseteq D$ und $\mu(D) = 0$ (d.h. $D \in \mathcal{M}$ ist μ-Nullmenge).*

Ferner gilt:

(d) *Sind A_k, $k \in \mathbb{N}$ μ-Nullmengen, so ist auch $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine μ-Nullmenge.*

Beweis. (b) und (d) folgen direkt aus der Monotonie und σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^*.

Zu (a): Sei $Z \in \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Dann ist nach (b) auch $\mu^*(Z \cap A) = 0$, also

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Da „$\leq$“ aufgrund der Subadditivität sowieso gilt, folgt Gleichheit und somit die μ^*-Messbarkeit von A.

Zu (c): Wegen $\mu^*(A) = 0$ existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $D_k \in \mathcal{M}$ mit $A \subseteq D_k$ und $\mu(D_k) < \frac{1}{k}$. Mit $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathcal{M}$ folgt dann $A \subseteq D$ und $\mu(D) \leq \mu(D_k) < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mu(D) = 0$. $\square$

Bemerkung 36.3. Ist μ σ-endlich, so kann man zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ genau dann μ^*-messbar ist, wenn sie sich als Vereinigung einer Menge aus $\mathcal{M}$ und einer Nullmenge schreiben lässt. Dies trifft insbesondere im Fall $(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda)$ zu, d.h. im Falle des N-dimensionale Lebesguemaßes.

Auch ohne die Voraussetzung der σ-Endlichkeit ist das System $\mathcal{M}_*$ aller Teilmengen, welche sich als Vereinigung einer Menge in $\mathcal{M}$ und einer Nullmenge schreiben lassen, immer noch eine σ-Algebra. Diese enthält $\mathcal{M}$ und ist in der σ-Algebra $\mathcal{M}^*$ aller μ^*-messbaren Teilmengen enthalten. Man nennt $\mathcal{M}_*$ *die Vervollständigung von $\mathcal{M}$* und bezeichnet die Mengen in $\mathcal{M}_*$ als *μ-messbare Teilmengen.*

Wie oben erwähnt, gilt im Falle des N-dimensionale Lebesguemaßes $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}^* = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ (vgl. Definition und Bemerkung 35.16), und die Begriffe

$$\lambda\text{-messbar}, \qquad \lambda^*\text{-messbar}, \qquad \text{Lebesgue-messbar},$$

stehen alle gleichbedeutend für eine Menge in der σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Bemerkung 36.4. Im Spezialfall des Lebesguemaßes λ ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ genau dann eine λ-Nullmenge , wenn gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Quader $I_k \in Q_N$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ und $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon$.

Dies folgt direkt aus der Charakterisierung von λ^* in Bemerkung 35.6. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf diesen Spezialfall.

Satz 36.5. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist Lebesgue-messbar*

(ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen mit $A \subseteq D$ und $\lambda^*(D \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Es existiert $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ mit $A \subseteq H$ und $\lambda^*(H \setminus A) = 0$.*

Beweis. „(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Nach Voraussetzung existieren offene Mengen $D_k \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $A \subseteq D_k$ und $\lambda^*(D_k \setminus A) < \dfrac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $H := \bigcap_{k=1}^\infty D_k$ eine Borelmenge mit $A \subseteq H$ und $\lambda^*(H \setminus A) \leq \lambda^*(D_k \setminus A) < 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\lambda^*(H \setminus A) = 0$.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Es ist $A = H \setminus (H \setminus A)$, wobei H nach Bemerkungen und Beispiele 35.8(a) und $H \setminus A$ als Nullmenge nach Satz 36.2(a) Lebesgue-messbar ist. Es folgt die Lebesgue-Messbarkeit von A.

„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: **1. Spezialfall:** $\lambda(A) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, und seien $I_k \in Q_N$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ und $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(I_k) < \lambda(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Wähle gemäß Bemerkung 34.10 offene Teilmengen $\mathcal{O}_k \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $I_k \subseteq \mathcal{O}_k$ und $\lambda(\mathcal{O}_k) < \operatorname{vol}(I_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Setze ferner $D := \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{O}_k$. Dann ist $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $A \subseteq D$ und

$$\lambda(D) \leq \sum_{k=1}^\infty \lambda(\mathcal{O}_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \Big(\operatorname{vol}(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(A) + \varepsilon < \infty.$$

Aufgrund der Additivität folgt nun $\lambda(D \setminus A) < \varepsilon$. **2. Allgemeiner Fall:** Aufgrund der σ-Endlichkeitkeit von λ können wir $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ mit Lebesgue-messbaren Mengen A_k mit $\lambda(A_k) < \infty$ schreiben. Der Spezialfall liefert dann offene Mengen $D_k \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $A_k \subseteq D_k$ und $\lambda(D_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Mit $D := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$ ist dann

$$A \subseteq D \qquad \text{und} \qquad D \setminus A = \bigcup_{k=1}^\infty (D_k \setminus A) \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty (D_k \setminus A_k),$$

also $\lambda(D \setminus A) \leq \sum_{k=1}^\infty \lambda(D_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. $\square$

Nachbemerkung: Der Beweis zeigt, dass H in Satz 36.5(iii) *als abzählbarer Schnitt offener Mengen gewählt werden kann. Eine solche Menge H bezeichnet man als G_δ-Menge. Man sieht z.B. leicht, dass jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ eine G_δ-Menge ist. Allerdings ist nicht jede Borelmenge eine G_δ-Menge. Z.B. ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ keine G_δ–Menge (Beweis mit dem Satz von Baire aus der Funktionalanalysis).*

Im Folgenden wollen wir Beispiele für λ-Nullmengen untersuchen.

Beispiele 36.6. (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^N$ eine λ-Nullmenge, denn

$$\{x\} \subseteq (x_1 - \varepsilon, x_1] \times \ldots \times (x_N - \varepsilon, x_N] =: I_\varepsilon \in Q_N \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und $\operatorname{vol}(I_\varepsilon) = \varepsilon^N \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(b) Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ ist Nullmenge nach (a) und Satz 36.2(c).

(c) $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N$ ist λ-Nullmenge, denn:

$$\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times \{0\} \ \text{ mit } I_k := (-k, k] \times \ldots \times (-k, k] \in Q_{N-1}.$$

Hierbei ist $I_k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N$ für alle k eine λ-Nullmenge, da

$$I_k \times \{0\} \subseteq I_k \times (-\varepsilon, 0] \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und

$$\lambda(I_k \times (-\varepsilon, 0]) = \operatorname{vol}(I_k \times (-\varepsilon, 0]) \to 0 \ \text{ für } \varepsilon \to 0$$

gilt.

Satz 36.7. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist λ-Nullmenge*

(b) *Für alle $\varepsilon > 0$ existieren* Würfel *$I_k \in Q_N$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ und $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon$.*

(c) *Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ und $\sum_{k=1}^\infty [\operatorname{diam} A_k]^N < \varepsilon$.*

Hierbei bezeichnet man einen Quader $I \in Q_N$ als Würfel, wenn alle Kantenlängen von I übereinstimmen.

Beweis. „(b) $\Longrightarrow$ (c)“: Dies folgt, da *vol*$(I) = N^{-\frac{N}{2}}[\operatorname{diam} I]^N$ für jeden *Würfel $I \in Q_N$* gilt.

„(c) $\Longrightarrow$ (a)“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, und seien A_k, $k \in \mathbb{N}$ Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ und $\sum_{k=1}^\infty [\operatorname{diam} A_k]^N < \frac{\varepsilon}{(2+2\varepsilon)^N}$. Wähle $x^k \in A_k$ beliebig, setze $\alpha_k = (1+\varepsilon) \operatorname{diam} A_k$ und definiere Würfel $I_k := (x_1^k - \alpha_k, x_1^k + \alpha_k] \times \cdots \times (x_N^k - \alpha_k, x_N^k + \alpha_k]$.

Dann gilt $A_k \subseteq I_k$ und $\operatorname{vol}(I_k) = (2\alpha_k)^N$. Es folgt

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) = 2^N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^N = (2+2\varepsilon)^N \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{diam} A_k]^N < \varepsilon.$$

Also ist A eine Nullmenge.

„(a) $\Longrightarrow$ (b)“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da A eine Nullmenge ist, existieren Quader I_k, $k \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Man sieht elementar, dass zu jedem k endlich viele Würfel $W_{k1}, \ldots, W_{k\,\tau_k}$ existieren mit

$$I_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\tau_k} W_{k\,j} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{\tau_k} \operatorname{vol}(W_{k\,j}) < 2^N \operatorname{vol}(I_k).$$

Somit folgt $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\tau_k} W_{ki}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\tau_k} \operatorname{vol}(W_{kj}) \leq 2^N \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon$. ☐

Korollar 36.8. *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine λ-Nullmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig, so ist auch $f(A) \subseteq \mathbb{R}^N$ eine λ-Nullmenge.*

Beweis. Sei K eine Lipschitzkonstante von f und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 36.7 existieren dann Mengen $A_k \subseteq \mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{diam} A_k]^N < \frac{\varepsilon}{K^N}$. Für $B_k := f(A \cap A_k)$ gilt dann

$$f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{diam} B_k]^N \leq K^N \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{diam} A_k]^N < \varepsilon.$$

Gemäß Satz 36.7 ist $f(A)$ also eine λ-Nullmenge. ☐

Bemerkung 36.9. Ist $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ affin linear, d. h. $f(x) = Tx + c$ mit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, $c \in \mathbb{R}^N$, so ist f insbesondere Lipschitz stetig und bildet damit nach Korollar 36.8 λ-Nullmengen auf λ-Nullmengen ab. Folglich ist jeder affine Unterraum V der Dimension $< N$ eine λ-Nullmenge, da $V \subseteq f(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ für eine geeignet gewählte affin lineare Abbildung f ist.

Korollar 36.10. *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$ und $A \subseteq D$ eine Nullmenge, so ist auch $f(A) \subseteq \mathbb{R}^N$ eine λ-Nullmenge.*

Beweis. Sei $\widehat{Q}$ die Menge aller abgeschlossenen Quader $K := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ für $i = 1, \ldots, N$ und $K \subseteq D$. Dann ist $\widehat{Q}$ abzählbar, und wie im Beweis von Satz 35.3 sieht man die Mengengleichheit

$$D = \bigcup_{K \in \widehat{Q}} K.$$

Ist $K \in \widehat{Q}$, so ist $f|_K$ Lipschitz-stetig mit Schranke $L_K := \max_{x \in K} \|\mathrm{d}f(x)\|$.

Sei nun $A \subseteq D$ eine λ-Nullmenge. Dann ist auch $A \cap K$ eine λ-Nullmenge und somit $f(A \cap K)$ ebenfalls nach Korollar 36.8. Mit Satz 36.2(c) folgt, dass $f(A) = \bigcup_{K \in \widehat{Q}} f(A \cap K)$ eine λ-Nullmenge ist. ☐

Bemerkung 36.11. (a) Ist $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $N > k$ und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^{N-k})$, so ist $\operatorname{Graph} f \subseteq \mathbb{R}^N$ eine λ-Nullmenge. Dies folgt aus Korollar 36.10, da nämlich $\operatorname{Graph} f = \widetilde{f}(A)$ gilt, mit $A := D \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$ und $\widetilde{f} \in C^1(D \times R^{N-k}, \mathbb{R}^N)$ definiert durch $\widetilde{f}(x,y) = (x, f(x))$. Tatsächlich kann man zeigen, dass $\operatorname{Graph} f$ bereits dann eine λ-Nullmenge ist, wenn f nur stetig ist.

(b) Mit Korollar 36.10 kann man auch zeigen, dass jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, $k < N$ eine λ-Nullmenge ist.

Definition 36.12. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ und sei $\mathcal{A}$ eine Aussage über Punkte aus B. Wir sagen „$\mathcal{A}$ gilt *fast überall* (kurz: f.ü.) auf B“, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq B$ gibt derart, dass $\mathcal{A}$ für alle $x \in B \setminus N$ gilt. Ist B aus dem gegebenen Zusammenhang bekannt, so sagen wir kurz: „$\mathcal{A}$ gilt *f.ü.*“.

37. Messbare Funktionen und Stufenfunktionen

Sei stets $(\Omega, \mathcal{M})$ ein Messraum.

Satz und Definition 37.1. *Ist Ω' eine beliebige Menge und $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, so ist*

$$f_*\mathcal{M} := \big\{A \in \mathcal{P}(\Omega') \,\big|\, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\big\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$$

eine σ-Algebra. Man nennt $f_*\mathcal{M}$ das direkte Bild von $\mathcal{M}$ unter f.

Beweis. Das Nachrechnen der σ-Algebren-Axiome ist eine leichte Übung. □

Definition 37.2. Sei $(\Omega', \mathcal{M}')$ ein weiterer Messraum. Eine Abbildung

$$f\colon \Omega \to \Omega', \qquad \text{bzw. genauer:} \quad f\colon (\Omega, \mathcal{M}) \to (\Omega', \mathcal{M}')$$

heißt *messbar*, wenn $\mathcal{M}' \subseteq f_*\mathcal{M}$ gilt, d.h. wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ für alle $A \in \mathcal{M}'$.

Bemerkung und Beispiel 37.3. Sei $(\Omega', \mathcal{M}')$ ein weiterer Messraum, und sei $f\colon \Omega \to \Omega'$.

(a) Ist $\mathcal{M}' = \{\varnothing, \Omega'\}$, so f messbar (dies gilt für **jede** Abbildung).

(b) Ist $\mathcal{M}' = \mathcal{P}(\Omega')$ und ist f messbar, so ist f auch messbar bzgl. jeder anderen σ-Algebra auf Ω'.

(c) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}'$ eine Teilmenge mit $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{A} \rangle^\sigma$ (d.h. $\mathcal{M}'$ wird von $\mathcal{A}$ erzeugt). Gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ für alle $A \in \mathcal{A}$, so ist f bereits messbar, denn dann gilt $\mathcal{A} \subseteq f_*\mathcal{M}$ und somit auch $\mathcal{M}' \subseteq f_*\mathcal{M}$.

(d) Seien speziell Ω, Ω' metrische Räume, betrachtet als Messräume mit den zugehörigen Borelalgebren $\mathcal{B}(\Omega)$ und $\mathcal{B}(\Omega')$. Ist f stetig, so ist f messbar nach (c), denn $\mathcal{B}(\Omega')$ wird nach Definition von den offenen Mengen erzeugt, und für jede offene Menge $A \in \mathcal{B}(\Omega')$ ist dann $f^{-1}(A) \subseteq \Omega$ offen und somit $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega)$.

(e) Ist speziell $\Omega' = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}' = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}$ fest gewählt und

$$f = 1_B, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

so ist f messbar (Leichte Übung!).

(f) Ist $(\Omega'', \mathcal{M}'')$ ein dritter Messraum und $g\colon \Omega' \to \Omega''$ eine weitere Abbildung, so gilt: f, g messbar $\implies$ $f \circ g$ messbar.

Definition und Bemerkung 37.4. (a) Auf der Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ betrachten wir im Folgenden die σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, welche von den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ und den Mengen $\{\infty\}, \{-\infty\}$ als σ-Algebra erzeugt wird. Dann wird $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ auch erzeugt von den Mengen $(a, \infty]$, $a \in \mathbb{Q}$, denn durch Bildung von Differenzen erhält man dann alle halboffenen Intervalle $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ und somit durch abzählbare Vereinigung alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (vgl. den Beweis von Satz 35.3). Schließlich erhält man auch $\{\infty\} = (0, \infty] \setminus (0, \infty)$ und $\{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus [\mathbb{R} \cup \{\infty\}]$.

(b) Für einer Abbildung $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \subseteq \Omega$$

und analog für „$\geq, =, \leq, <$“. Insbesondere ist dann $\{f = c\} = f^{-1}(c)$. Gemäß (a) ist f genau dann messbar, wenn folgende äquivalente Bedingungen gelten:

- $\{f > c\} \in \mathcal{M}$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\{f \leq c\} \in \mathcal{M}$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\{f < c\} \in \mathcal{M}$ für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\{f \geq c\} \in \mathcal{M}$ für alle $c \in \mathbb{R}$

Anstelle von '$c \in \mathbb{R}$' kann man hier jeweils auch '$c \in \mathbb{Q}$' schreiben.

(c) Eine Abbildung $f\colon (\Omega, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist genau dann messbar, wenn sie als Abbildung $f\colon (\Omega, \mathcal{M}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar ist.

Satz 37.5. (a) *$f\colon (\Omega, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ ist genau dann messbar, wenn die Komponenten $f_1, \ldots, f_N\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar sind.*

(b) *Die messbaren Funktionen $f\colon (\Omega, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(c) *Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so auch die Funktionen $f^{\pm}, |f|\colon X \to \mathbb{R}$.*

(d) *Sind $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so auch $fg\colon \Omega \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Vorbemerkung: Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ messbar und $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ist auch $h \circ f$ messbar gemäß Bemerkung und Beispiel 37.3.

(a): Die Projektionen $\pi_j\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\pi_j(x) = x_j$ sind stetig. Ist also $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ messbar, so auch $f_j := \pi_j \circ f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, N$. Sei umgekehrt f_j messbar für $j = 1, \ldots, N$, und sei $I := (a, b] \in Q_N$ mit $a, b \in \mathbb{R}^N$. Dann ist

$$f^{-1}(I) = \bigcap_{j=1}^{N} f_j^{-1}\Big((a_j, b_j]\Big) \in \mathcal{M}$$

nach Voraussetzung. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ von dem Quadersystem Q_N erzeugt wird, folgt die Messbarkeit von f gemäß Bemerkung und Beispiel 37.3.

(b): Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und sei $h\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definiert durch $h(x,y) = \lambda x + \mu y$. Dann ist h stetig. Sind also $f, g\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^N$ messbar, so auch $\lambda f + \mu g = h \circ (f,g)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gemäß (a) und der Vorbemerkung.

(c): Dies folgt mit der Vorbemerkung, da die Funktionen $\min\{\cdot, 0\}, \max\{\cdot, 0\}, |\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(d): Dies folgt wie (b), da $h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = xy$ stetig ist. □

Satz 37.6. *Seien $f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Die auf Ω punktweise definierten Funktionen $f := \inf_k f_k$ und $F := \sup_k f_k$ sind messbar. Daraus folgt dann direkt auch die Messbarkeit von $\min f_k$ und $\max f_k$ bei endlich vielen Funktionen.*

(b) *Die auf Ω punktweise definierten Funktionen $g := \liminf_{k\to\infty} f_k$ und $G := \limsup_{k\to\infty} f_k$ sind messbar.*

Beweis. Beweis **(a):** Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f \geq c\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \overbrace{f_k \geq c}^{\in \mathcal{M}} \right\} \in \mathcal{M}$ und $\{F \leq c\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \leq c\} \in \mathcal{M}$.

(b): Nach (a) ist $g_k := \inf_{\ell \geq k} f_\ell$ messbar für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit auch $g = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$. Ähnlich folgt die Messbarkeit von G. □

Korollar 37.7. *Seien $f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$ messbar und derart, dass der punktweise Grenzwert mit $f := \lim_{k\to\infty} f_k\colon \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ existieren möge. Dann ist auch f messbar.*

Definition und Bemerkung 37.8. Eine messbare Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt. In diesem Fall ist $\varphi = \sum_{y\in\varphi(\Omega)} y\, 1_{\{\varphi = y\}}$. Die Menge solcher Funktionen bildet (offensichtlich) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und mit $\varphi, \psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen $\min\{\varphi, \psi\}$ und $\max\{\varphi, \psi\}$ Stufenfunktionen.

Satz 37.9. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann existiert eine Folge $(\varphi_k)_k$ von Stufenfunktionen mit*

$$|\varphi_k(x)| \leq |f(x)| \quad \textit{für alle } k \qquad \textit{und} \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \textit{für alle } x \in \Omega.$$

Ist zudem f nichtnegativ, so kann man zusätzlich annehmen, dass

$$0 \leq \varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \leq f(x) \quad \textit{für alle } x \in \Omega,\ k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beweis. **1. Spezialfall:** f nichtnegativ. Definiere dann $\varphi_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} (m-1)2^{-k}, & \text{falls } (m-1)2^{-k} \leq f(x) < m2^{-k} \text{ für ein } m \in \mathbb{N},\ m \leq k2^k \text{ gilt;} \\ k, & \text{falls } f(x) \geq k \text{ gilt.} \end{cases}$$

Die so definierte Folge von Stufenfunktionen hat die gewünschten Eigenschaften.

2. Allg. Fall: Sei f eine beliebige messbare Funktion $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind auch $f^+, f^-\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar nach Satz 37.5. Wir wählen $(\varphi_k^1)_k$ bzw. $(\varphi_k^2)_k$ zu f^+ bzw. f^- wie im Spezialfall und setzen $\varphi_k := \varphi_k^1 - \varphi_k^2$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $|\varphi_k| \le |\varphi_k^1| + |\varphi_k^2| \le f^+ + f^- = |f|$ fúr alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Ausblick 37.10. Sei μ ein Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{M})$. Wir haben nun alle Hilfsmittel beisammen, um für eine große Klasse meßbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ das Integral $\int f$ bzgl. μ zu definieren (andere Bezeichnungen: $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu$, $\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ oder $\int_\Omega f(x)\mu(\mathrm{d}x)$). Dazu geht man wie folgt vor:

(a) Für eine nichtnegative Stufenfunktion $\varphi\colon \Omega \to [0,\infty)$ sei

$$\int \varphi := \sum_{y\in\varphi(X)} \underbrace{y \cdot \mu(\{\varphi = y\})}_{\ge 0} \quad \in \quad [0,\infty].$$

(b) Für eine nichtnegative messbare Funktion $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ sei

$$\int f := \sup\Big\{ \int \varphi \;\Big|\; \varphi \text{ Stufenfunktion, } 0 \le \varphi \le f \Big\}$$

Zu zeigen ist die Konsistenz mit (a) in dem Fall, wo f selbst eine Stufenfunktion ist.

(c) Eine beliebige messbare Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ nennt man *integrierbar*, wenn $\int |f| < \infty$ ist. In diesem Fall ist zu zeigen, dass inf $f^+, \int f^- < \infty$ gelten. Dann definiert man

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

Man zeigt, dass die Menge der integrierbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und das Integral $\int$ eine Linearform auf diesem Raum ist.

All dies ist Inhalt der Vorlesung „Integrationstheorie“. Ferner lernt man dort, wie sich Integrale und damit auch Maße von Mengen konkret berechnen lassen.

Nachtrag 37.11. In der Integrationstheorie wird es oft erforderlich sein, mit Funktionen umzugehen, die nicht auf ganz Ω definiert sind. Dazu ist folgender Sachverhalt nützlich: Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $\Omega' \in \mathcal{M}$. Sei ferner $\mathcal{M}'$ das System der Mengen $Y \in \mathcal{M}$ mit $Y \subseteq \Omega'$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{M}'$ ist eine σ-Algebra auf Ω'

(b) Die Einschränkung $\mu_{\Omega'}$ von μ auf $\mathcal{M}'$ definiert ein Maß auf dem Messraum $(\Omega', \mathcal{M}')$.

(c) Für eine Funktion $u\colon \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

  (i) u ist messbar (integrierbar) bzgl. $\mu_{\Omega'}$.

  (ii) Die triviale Fortsetzung $\tilde{u}$ von u auf Ω ist μ-messbar (μ-integrierbar) .